

# Capitolo 1

## Piani e Spazi Affini

### 1.1 Introduzione

Un **piano affine** costituisce una modalità per la rappresentazione di un oggetto sul piano. All'interno di un piano affine si ha uno **spazio vettoriale** sul campo reale che interagisce con i **punti** del piano. Il piano affine è dato per l'appunto dall'interazione dei vettori con i punti del piano, allora si può dire che i vettori trasportano i punti.

Punti del piano  $\rightarrow P \in S$

Spazio vettoriale  $\rightarrow \underline{v} \in V$  con  $V = \langle \underline{a}, \underline{b} \rangle, \dim = 2$

Lo spazio affine viene definito tramite alcune regole di base:

- $\exists S \times V \rightarrow S$  ovvero esiste sempre un punto appartenente al piano che moltiplicato per un vettore torna sempre un punto del piano.
- $P \wedge \underline{Q} = P \rightarrow P \wedge \underline{v} = Q \in S$  quindi un punto qualsiasi moltiplicato per il vettore nullo torna sempre lo stesso punto. Si può dire che al punto viene sommato uno spostamento pari al modulo del vettore, così che in questa maniera il punto P non si muove mai.
- $(P \wedge \underline{v}) \wedge \underline{u} = P \wedge (\underline{v} + \underline{u})$  nella pratica si tratta del fatto che spostare un punto prima tramite un vettore poi tramite un secondo vettore è come spostare lo stesso punto tramite la somma dei due vettori di spostamento ( $\rightarrow$  *regola del parallelogramma*).
- $\forall A, B \in S \exists ! \underline{v} | B = A \wedge \underline{v}$  allora, per ogni coppia di punti nel piano, esiste un unico vettore che sposti il primo punto nell'altro.

Quella appena data riguardo i piani affini è una definizione piuttosto astratta, tuttavia torna utile quando S coincide con il piano della geometria elementare.

**Segmento geometrico orientato.** Viene denominato tale un qualsiasi segmento che, compreso tra due punti A e B, possiede anche un verso di orientamento. In questa maniera definisce lo spostamento dal punto A nel punto B. Nella pratica, un segmento geometrico orientato individua sempre un **vettore**  $\rightarrow \underline{v} = B - A$ . Un vettore non corrisponde solo al segmento orientato in sé ma rappresenta anche la sua intera **classe di equipollenza** costituita da tutta quella serie di vettori identici in modulo, paralleli al vettore preso in considerazione.

Si ricorda che la regola del parallelogramma la si applica unicamente a vettori con la stessa origine.

### 1.2 Punti e Rette

L'azione che solitamente si applica su un punto corrisponde allo **spostamento fisico** del punto ad opera di un vettore (e della sua classe di equipollenza) che insiste su di esso.

Un **sistema di riferimento affine** è definito da un *punto* appartenente al piano e da una *base* appartenente allo spazio vettoriale, così che sia possibile associare ad ogni punto del piano delle precise coordinate dato il sistema di riferimento. Il punto generico

$P \equiv (x, y)$  definisce quindi un sistema di riferimento del tipo  $P - O = x\underline{a} + y\underline{b}$  misurando la sua distanza dal punto di origine del sistema, ovvero O.

Il classico sistema di riferimento cartesiano è un caso speciale di sistema di riferimento in

uno spazio affine. Ovviamente, rispetto al sistema di riferimento verranno individuate porzioni di piano positive o negative rispetto le x e le y del sistema.

Una **retta** r che giace sul piano si individua tramite un *punto* attraverso cui passa ed un *vettore* che ha origine nel suddetto punto il quale possiede quindi la stessa direzione della retta. Si prende in esame quindi un punto generico della retta e si definisce così l'equazione della suddetta  $\rightarrow P - P_0 = t \underline{v}$  dove t è un parametro numerico positivo o negativo ma reale che rappresenta tutti i punti della retta r; il suo essere positivo o negativo deriva dal verso del vettore che definisce la retta. Quella appena indicata è detta **rappresentazione parametrica della retta**, molto utile in ambito computer grafica. Ovviamente è possibile individuare la retta r come l'unica passante per due punti A e B.

Dati due punti  $A \equiv (x_a, y_a), B \equiv (x_b, y_b)$  l'equazione parametrica della retta può prendere la forma di  $P - A = t(B - A)$ .

$$\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_b - x_a \\ y_b - y_a \end{bmatrix} \quad \text{dove} \quad \underline{v} = B - A \rightarrow B - A = \begin{bmatrix} x_b \\ y_b \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} x_a \\ y_a \end{bmatrix}$$

Il vettore  $\underline{v} = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}$  viene rappresentato attraverso le sue stesse coordinate come un vettore colonna, calcolato come appena mostrato.

$$\begin{bmatrix} x_a \\ y_a \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_b \\ y_b \end{bmatrix} \quad \text{ovvero} \quad B = A + \underline{v}$$

Il tutto è possibile grazie alla regola del parallelogramma.

Ma tornando al caso precedente:

$$\begin{bmatrix} x_p - x_a \\ y_p - y_a \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} \quad \text{quindi} \quad \begin{matrix} x = x_0 + \alpha t \\ y = y_0 + \beta t \end{matrix} \quad \text{con} \quad \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \underline{v} \in V$$

Dove il sistema di equazioni appena ricavato corrisponde alla **forma parametrica** della retta espressa poc'anzi. Ovviamente, oltre alla forma parametrica della retta esiste anche la sua corrispettiva **forma cartesiana**, espressa in una maniera differente. Si ricorda che il vettore  $\underline{v}$  ed il vettore  $P - P_0$  devono essere tra loro *dependenti*<sup>1</sup>, infatti le matrici delle loro coordinate, espresse come vettori colonna, vanno affiancate ed il determinante della matrice risultate da questa unione dev'essere sempre pari a zero.

$$\det \begin{bmatrix} x - x_0 & \alpha \\ y - y_0 & \beta \end{bmatrix} = 0 \quad \text{dove} \quad P - P_0 = \begin{bmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \underline{v} = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}$$

$$\beta(x - x_0) - \alpha(y - y_0) = 0 \quad \beta x - \alpha y + (-\beta x_0 + \alpha y_0) = 0$$

Così la *forma cartesiana* della retta risulta essere  $ax + by + c = 0$  con  $(a, b) \neq (0, 0)$ .

I coefficienti dell'equazione cartesiana della retta sono molto importanti. Questi due modi di rappresentazione della retta tra loro alternativi sono molto utili perchè, dato un punto qualsiasi, si può capire se questo appartiene o meno alla retta in esame (prerogativa della forma cartesiana grazie alla quale questa verifica risulta essere più facile ed intuitiva). Inoltre l'espressione cartesiana si può valutare per capire dove un punto giace rispetto alla

<sup>1</sup> **Vettori dipendenti.** Due vettori sono tra loro linearmente dipendenti se esiste almeno una n-upla di valori scalari non nulli che annullano la loro combinazione lineare.

retta (sopra o sotto, per intenderci) a livello di semipiano (perchè la retta divide il piano in due semipiani). Vale lo stesso discorso per due punti che, se hanno segno concorde, giacciono sicuramente nello stesso semipiano.

### 1.2.1 Involucro convesso

Si può definire l'**involucro convesso** come il più piccolo poligono che contiene un certo insieme di punti. La sua determinazione avviene tramite la valutazione della presenza o meno di questi punti nei semipiani di una serie di rette (espresse per comodità nella loro forma cartesiana) determinate a loro volta da coppie di punti dell'insieme. L'involucro convesso sarà quindi dato dall'intersezione di tutti i semipiani contenenti tutti i punti dell'insieme, rispetto alle rette più esterne le quali costituiranno i bordi dell'involucro.

L'importanza degli involucri convessi è indiscutibile soprattutto quando si vuole studiare se due *curve* si intersecano o meno (anche se rimane difficile stabile se le due curve si toccano soltanto). Si possono quindi "in scatolare" le curve in appositi involucri convessi che ne descrivono la forma: se gli involucri si sovrappongono, allora ci sono grosse probabilità che lo facciano anche le curve, in caso contrario non vale nemmeno la pena di verificare se le curve si toccano, dal momento che non lo fanno nemmeno gli involucri convessi. Solitamente gli involucri convessi delle curve si costruiscono a partire dai punti di controllo dei loro poligoni (definiti anch'essi poligoni di controllo). È possibile però spezzare gli involucri ed i poligoni in sotto-poligoni più piccoli ed a loro volta più accurati. Si ricorda comunque che due poligoni possono toccarsi e sovrapporsi anche se non lo fanno le relative curve: ogni caso va comunque studiato a fondo e verificato tramite prove dirette.

### 1.2.2 Mutua posizione di punti e rette

Punti e rette sono elementi detti **elementi lineari del piano**. Studiare la loro **mutua posizione** significa determinare come questi elementi si vengono a trovare l'uno rispetto all'altro sul piano (coincidono? Si sovrappongono? Si toccano oppure no?). Spesso se una retta si trova in forma parametrica risulta più opportuno convertirla in forma cartesiana eliminando il parametro  $t$  per operare questi confronti (che risultano così facilitati).

Due rette tra loro possono essere coincidenti, intersecarsi oppure essere parallele. A questo proposito è possibile operare il **test dell'intersezione**, utile quando si ha a che fare con due rette una in forma parametrica e l'altra in forma cartesiana:

$$\begin{aligned}
 r \rightarrow ax+by+c=0 & \quad s \rightarrow \begin{cases} x=x_0+\alpha t \\ y=y_0+\beta t \end{cases} \\
 a(x_0+\alpha t)+b(y_0+\beta t)+c=0 & \quad (a\alpha+b\beta)t+(ax_0+by_0+c)=0
 \end{aligned}$$

Se  $a\alpha+b\beta=0$  tendenzialmente le due rette sono parallele, altrimenti coincidono. Quindi si passa a valutare  $ax_0+by_0+c$  che indica l'appartenenza o meno del punto  $P_0$  alla retta che, delle due, era espressa in forma cartesiana.

Nel caso entrambe le rette siano in forma cartesiana si tende a trasformarne una in forma parametrica:

$$\begin{aligned}
 r \rightarrow ax+by+c=0 \\
 s \rightarrow a'x+b'y+c'=0
 \end{aligned}
 \quad \text{allora } b' \neq 0 \rightarrow y = \frac{a'x-c'}{b'} = \frac{a'}{b'}x - \frac{c'}{b'}
 \quad r \rightarrow y = \frac{x-t}{b'} - \frac{c'}{b'}$$

Altrimenti si cerca l'intersezione tra le due rette prese in esame considerando la **matrice** associata ai loro coefficienti:

$$\det \begin{bmatrix} a & b \\ a' & b' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -c \\ -c' \end{bmatrix} = ?$$

Se il  $\det=0$  le due rette o sono parallele oppure coincidono, mentre se il determinante è diverso da zero esiste un punto in comune ad entrambe perché queste si intersecano (quindi la soluzione è unica).

Se le due rette sono entrambe in forma parametrica esiste anche in questo caso un metodo comodo per verificare come esse si pongono l'una nei confronti dell'altra: si tratta dello stesso metodo adottato per capire come e quando si intersecano due segmenti. Ovviamente se le rette sono parallele i segmenti ad esse associati non si toccano, ma se le due rette sono incidenti può capitare che questi segmenti si intersechino come che non si intersechino a seconda di dove giacciono sulla retta.

$$\begin{aligned} s \rightarrow x &= x_1 + \alpha t & r \rightarrow P - P_0 &= \nu t & \text{con } t &\in [a, b], \tau \in [c, d] \\ y &= y_1 + \beta t & s \rightarrow P - P_1 &= \underline{w} \tau \\ P &= P_0 + \nu t = P_1 + \underline{w} \tau \end{aligned}$$

Dove quella appena riportata risulta essere una vera e propria relazione tra due vettori  $\rightarrow t \underline{\nu} - \tau \underline{w} = (P_1 - P_0)$ . Se  $\underline{w}, \underline{\nu}$  sono tra loro *linearmente indipendenti* esistono un solo  $t$  ed un solo  $\tau$  dal momento che i vettori così intesi individuano assieme una *base* nello spazio vettoriale ad essi associato, così che questi due valori corrispondano alle coordinate del punto di intersezione delle due rette (si veda l'espressione riportata più in alto come l'equazione di un sistema di riferimento affine ad hoc)  $\rightarrow P \equiv (t, \tau)$ . Ovviamente per verificare che anche i segmenti si intersechino bisogna controllare che il punto così trovato esista nell'intervallo di ciascun segmento. Se invece i due vettori sono tra loro *dipendenti* si viene a creare una situazione del tipo  $(\underline{w} = h \underline{\nu}) \rightarrow (t - h \tau) \underline{\nu} = P_1 - P_0$ . Va da sé che  $P_1 - P_0$  sia un multiplo di  $\underline{\nu}$  quindi i due vettori hanno la stessa direzione delle rette così che esse possano essere parallele od al massimo coincidere. Se il multiplo non esiste le rette sono sicuramente parallele, altrimenti  $P_1 - P_0 = k \underline{\nu} \rightarrow t - h \tau = k$  e le due rette coincidono. Anche in questo caso si deve verificare che i segmenti si tocchino per certificare che le rette coincidono, e basta studiare dove si trovano all'interno dei loro intervalli.

### 1.3 Piano euclideo

Si passa dal sistema di riferimento affine al piano euclideo ed allo spazio vettoriale euclideo introducendo il concetto di prodotto scalare:

$$\underline{\nu} = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} \quad \underline{w} = \begin{bmatrix} \alpha' \\ \beta' \\ \gamma' \end{bmatrix} \rightarrow \underline{\nu} \times \underline{w} = \alpha \alpha' + \beta \beta' + \gamma \gamma'$$

Si definisce quindi norma o lunghezza di un vettore la misura:

$$\|\underline{\nu}\| = \sqrt{\underline{\nu} \times \underline{\nu}} = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2} \quad \text{con } \underline{\nu}, \underline{w} \neq 0 \quad \text{inoltre} \quad \cos \theta = \frac{\underline{\nu} \times \underline{w}}{\|\underline{\nu}\| \|\underline{w}\|}$$

Dove il coseno riporta la misura dell'angolo compreso tra i due vettori, non diversa dalla misura tradizionale della trigonometria. Il tutto per introdurre questioni metriche legate al concetto di **spazio affine euclideo**.

Si ricorda che un versore è un vettore di modulo pari a 1  $\rightarrow \langle \underline{e}_1, \underline{e}_2 \rangle$  è una coppia di versori che rappresenta una **base ortonormale**. Il sistema di riferimento ora risulta essere ortogonale, quindi gli assi sono specificatamente perpendicolari riconducendo tutto il sistema ad una serie di casi più familiari. Ora anche le coordinate x ed y possiedono un significato metrico grazie al quale è possibile calcolare la distanza tra due punti A e B, appunto data dalla norma del vettore tra essi compreso.

$$P-O = x\underline{e}_1 + y\underline{e}_2$$

$$\|P-O\| = \sqrt{(x\underline{e}_1 + y\underline{e}_2) \times (x\underline{e}_1 + y\underline{e}_2)} = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \text{quindi} \quad \|B-A\| = \sqrt{(x_b - x_a)^2 + (y_b - y_a)^2}$$

Due vettori sono tra loro perpendicolari se il loro prodotto scalare risulta essere uguale a zero. Se i vettori giacenti su due rette sono tra loro perpendicolari, lo sono anche le loro rette associate: si tratta di un buon metodo per stabilire se due rette sono perpendicolari. Si può rafforzare così il concetto di **mutua posizione**.

### 1.3.1 Mutua posizione

**Punto-Retta.** Si pensi a due rette parallele, la loro distanza corrisponde alla distanza di una delle due rette da un punto della seconda retta a patto che il segmento che congiunge il punto alla prima retta sia perpendicolare ad essa. Tra un punto ed una retta è sempre utile calcolare la distanza che li separa: se è pari a zero o nulla il punto appartiene alla retta (e le due rette coincidono).

Si consideri quindi l'unica retta QK passante per il punto Q preso in esame e che sia anche perpendicolare alla retta r dalla quale si vuole calcolare la distanza del punto. La distanza sarà data quindi da  $QK = \delta = HP_0$  dove  $HP_0$  è un secondo segmento parallelo a QK. Si considera quindi il vettore compreso tra  $P_0$  e Q ed il versore normale di r oltre al prodotto scalare  $(Q - P_0) \times \underline{n}$ .

$$(Q - P_0) \times \underline{n} = \|Q - P_0\| \|\underline{n}\| \cos \theta = \|Q - P_0\| \cos \theta = \delta \rightarrow (Q - P_0) \times \underline{n} = \delta$$

Tuttavia tempo prima si è detto che  $(P - P_0) = t \underline{v}$  allora  $(P - P_0) \times \underline{n} = 0$  (si ricorda che il prodotto scalare tra vettori perpendicolari da sempre come risultato zero):

$$\begin{bmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = 0 \quad \text{dove} \quad \underline{n} = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}, P \equiv (x, y), P_0 \equiv (x_0, y_0)$$

$$\alpha(x - x_0) + \beta(y - y_0) = 0 \quad \text{allora} \quad r \rightarrow \alpha x + \beta y - (\alpha x_0 + \beta y_0) = 0$$

Normalizzando l'equazione cartesiana appena ottenuta si ricava che i coefficienti di x ed y sono davvero a loro volta dei versori.

$$\frac{\alpha x + \beta y + c}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} = 0 \quad \left| \frac{\alpha x + \beta y + c}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} \right| = \delta$$

Questo discorso vale se il verso del versore normale è quello indicato nell'esempio, se il verso è opposto ovviamente le cose cambiano. Il coseno dell'angolo preso in esame diventa

l'opposto del secondo angolo (dal momento che la somma di due angoli di questo tipo deve tornare sempre  $180^\circ$ ). Alla fine, il calcolo rimane lo stesso ma restituisce il valore opposto della distanza, per questo motivo basta effettuare il calcolo del valore assoluto.

**Area del triangolo.** La tecnica appena mostrata per calcolare la distanza punto-retta torna utile anche per ricavare le aree dei poligoni, ad esempio l'area di un triangolo. Ogni poligono può essere triangolato  $\rightarrow$  l'area di un triangolo è data da tre punti del piano tra loro non allineati.

Si pensi ad un triangolo ABC dove il lato AB giace sulla retta r.

$$Area\ ABC = \frac{\|B-A\| \text{dist}(C, r)}{2} \quad \text{dove } \text{dist}(C, r) = h$$

A partire dal punto A si possono individuare due vettori/versori  $\underline{a}, \underline{b}$  il primo giacente sul lato AC, il secondo sul lato AB e quindi anche sulla retta r. Tali vettori possono individuare l'area del parallelogramma associato al doppio del triangolo preso in esame:

$$Area\ ABC = \frac{\|\underline{a} \wedge \underline{b}\|}{2} \quad \text{dove } Area\ ABCA' = \|\underline{a} \wedge \underline{b}\|$$

I vettori individuati appartengono ovviamente allo spazio vettoriale euclideo il quale è, in quanto spazio, tridimensionale. Per questo motivo l'area del triangolo dev'essere calcolata come segue:

$$\begin{bmatrix} l & j & k \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{bmatrix} \quad \underline{a} \wedge \underline{b} = \begin{bmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ -a_1 b_3 + a_3 b_1 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{bmatrix} \quad \text{dove } \underline{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}, \underline{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix},$$

Il prodotto vettoriale non è commutativo. La norma di  $\underline{a} \wedge \underline{b}$  va calcolata sempre in valore assoluto.

$$\|\underline{a} \wedge \underline{b}\| = |a_1 b_2 - a_2 b_1| = \left| \det \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix} \right|$$

Si pensi per esempio ad un triangolo costruito nel piano euclideo supportato dal sistema di riferimento cartesiano. Siano  $A \equiv (0,0), B \equiv (a,b), C \equiv (c,d)$ . L'area è data da:

$$\det \begin{bmatrix} a & c \\ d & b \end{bmatrix} = |ad - bc|$$

Per calcolare l'area del suddetto triangolo è possibile calcolare l'area del parallelogramma associato dalla quale poi si possono sottrarre le aree in eccesso.

$$Area\ ABC = ad - \frac{ab}{2} - \frac{dc}{2} - \frac{(d-b)(a-c)}{2} = ad - \frac{ad}{2} - \frac{bc}{2} = \frac{ad - bc}{2}$$

Un altro modo prevede di sfruttare la matrice di Gram<sup>2</sup>.

<sup>2</sup> **Matrice di Gram.** Questa matrice è sfruttata per verificare l'indipendenza lineare delle funzioni, cosa che avviene solo se tale matrice risulta invertibile.

$$G(\underline{a}, \underline{b}) = \begin{bmatrix} \underline{a} \wedge \underline{a} & \underline{a} \wedge \underline{b} \\ \underline{b} \wedge \underline{a} & \underline{b} \wedge \underline{b} \end{bmatrix} \quad \text{quindi} \quad \text{Area } ABC = \sqrt{\frac{\det[G(\underline{a}, \underline{b})]}{2}}$$

C'è anche una formula tipica per la risoluzione dell'area per i triangoli piani, che consiste, a partire da punti del tipo  $A \equiv (A_x, A_y), B \equiv (B_x, B_y), C \equiv (C_x, C_y)$ :

$$\text{Area } ABC = \det \begin{bmatrix} A_x & A_y & 1 \\ B_x & B_y & 1 \\ C_x & C_y & 1 \end{bmatrix} \quad \text{che però prevede una divisione per 2.}$$

Quest'ultimo è un metodo molto utile quando si hanno a disposizione le coordinate dei punti nel piano, mentre gli altri metodi sopra citati tornano utili quando invece si hanno a disposizione solo le coordinate dei vettori.

### 1.3.2 Coordinate baricentriche

Le **coordinate baricentriche** risultano molto utili in computer grafica per la colorazione luminosa ed intensiva. Si pensi ad un triangolo ABC ed ad un punto P tutti appartenenti al piano. Si studia la posizione di P che potrebbe essere sia all'interno come all'esterno del triangolo ABC. Si considera quindi un sistema di riferimento affine basato in A del tipo  $\mathbb{R} = \{A, \langle \underline{a}, \underline{b} \rangle\}$  dove il primo versore corrisponde al segmento AB ed il secondo ad AC.

$$\begin{aligned} P - A &= \lambda \underline{a} + \mu \underline{b} = \lambda (B - A) + \mu (C - A) = \lambda B - \lambda A + \mu C + \mu A = A(-\mu - \lambda) + \mu C + \lambda B \\ P &= (1 - \mu - \lambda)A + \mu C + \lambda B \quad \text{dove} \quad 1 - \mu - \lambda = \nu \end{aligned}$$

Le **coordinate baricentriche di P nel piano** saranno date allora da  $P \equiv (\nu, \mu, \lambda)$ . Questo tuttavia è un calcolo effettuato per tutti i punti interni al triangolo e non per quelli esterni.

## 1.4 Lo spazio affine

Nello spazio, che è unico, si parla di **spazi affini euclidei**.

$E^3 \quad \dim(V) = 3 \quad V = \langle \underline{b}_1, \underline{b}_2, \underline{b}_3 \rangle$  base ortonormale con V spazio vettoriale euclideo

$$\underline{v} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, \quad \underline{w} = \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} \quad \underline{v} \times \underline{w} = xx' + yy' + zz' \quad \text{con} \quad \mathbb{R} = \{O, \langle \underline{b}_1, \underline{b}_2, \underline{b}_3 \rangle\}$$

$$P - O = x \underline{b}_1 + y \underline{b}_2 + z \underline{b}_3 \quad P \equiv (x, y, z) \quad \|\underline{v}\| = \sqrt{\alpha + \beta + \gamma} \quad \cos \theta = \frac{\underline{v} \times \underline{w}}{\|\underline{v}\| \|\underline{w}\|}$$

### 1.4.1 La retta nello spazio

La retta, nello spazio come nel piano, è sempre individuata a partire da un punto P ed un vettore  $\underline{v}$  che indica la direzione della retta.

$$P - P_0 = \underline{v}t \quad r \rightarrow \begin{cases} x = x_0 + \alpha t \\ y = y_0 + \beta t \\ z = z_0 + \gamma t \end{cases} \quad \text{con } \underline{v} = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix}, P \equiv (x, z, y), P_0 \equiv (x_0, y_0, z_0)$$

### 1.4.2 Il piano nello spazio

Individuare un piano nello spazio è abbastanza intuitivo: a partire da un punto  $P_0$  generico nello spazio si scelgono due vettori/versori linearmente indipendenti, in questa maniera si individua un piano in maniera inequivocabile.

$$P - P_0 = \lambda \underline{v} + \mu \underline{w} \quad \pi \rightarrow \begin{cases} x = x_0 + \alpha \lambda + \alpha' \mu \\ y = y_0 + \beta \lambda + \beta' \mu \\ z = z_0 + \gamma \lambda + \gamma' \mu \end{cases} \quad \text{dove } \underline{v} = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} \underline{w} = \begin{bmatrix} \alpha' \\ \beta' \\ \gamma' \end{bmatrix}$$

Nella pratica si parla della generalizzazione di uno dei casi precedentemente discussi. Per scegliere di tracciare un triangolo sul piano ogni retta avrà ovviamente una equazione in forma cartesiana in  $\lambda, \mu$ . Va da sé che quanto visto fin'ora può essere tranquillamente portato nel piano con maggiore attenzione per  $\lambda, \mu$ .

Naturalmente come nel piano, anche nello spazio rette e piani possiedono rappresentazioni cartesiane  $\rightarrow P - P_0 \in \langle \underline{v}, \underline{w} \rangle \subset V$ .

$$\det \begin{bmatrix} x - x_0 & \alpha & \alpha' \\ y - y_0 & \beta & \beta' \\ z - z_0 & \gamma & \gamma' \end{bmatrix} = 0 \quad \text{allora } ax + by + cz + d = 0 \rightarrow \pi$$

Ovviamente i coefficienti a, b e c non possono essere tutti contemporaneamente nulli, dal momento che esprimono le coordinate del vettore perpendicolare al piano in esame, il cui prodotto scalare con i vettori/versori che individuano il piano torna zero.

Si può quindi derivare la formula per calcolare la distanza di un punto generico dal piano:

$$\left| \frac{ax + by + cz + d}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \right| = \delta$$

### 1.4.3 Mutua posizione

**Segmento-Segmento.** Si pensi di avere due segmenti distinti nello spazio e che si voglia studiare come questi si pongono l'uno nei confronti dell'altro. Lì si osserva a partire da un punto di vista stabilito, detto E. I due segmenti possono **sovrapporsi** oppure possono essere **disgiunti** (si dà per assodato che non possono coincidere). Studiando le due rette o segmenti attraverso la loro forma cartesiana è possibile determinare la loro posizione reciproca (sempre dal punto di vista E). Serve stabilire un piano che si determina a partire da tre punti non allineati (ovvero il punto E ed, a seconda dei casi, i punti di estremo di due segmenti).

Si stabilisce il piano che passa per i punti EAB, quindi si osserva se i restanti punti C e D (estremi del secondo segmento) giacciono entrambi nello stesso semispazio individuato dal piano secante. Se così accade il segmento CD non interseca AB ed il suo semipiano. Se invece non stanno nello stesso semipiano, il segmento CD taglia il piano EAB.

Si ripete lo stesso procedimento studiando però come si pone il segmento AB rispetto al

piano individuato da ECD. I due segmenti AB e CD sono da reputarsi “incrociati” solo se in entrambe le verifiche succede che i segmenti tagliano il piano venutosi a creare. Per capire quale segmento sta “sopra” e quale “sotto” bisogna determinare il piano ACB: se i punti E e D giacciono nello stesso semipiano CD sta sopra ad AB, altrimenti avviene il contrario.

**Wireframe.** Si tratta della realizzazione grafica tridimensionale dedicata a comunicare il concetto di profondità in computer grafica. Il tutto avviene rendendo verosimile la sovrapposizione dei segmenti nella geometria della scena. Si tratta di una tecnica che si sfrutta molto spesso.

Come detto poco prima riguardo lo studio dell'area di un triangolo nel piano, anche nello spazio capita che la norma del prodotto vettoriale  $(\underline{a} \wedge \underline{b})$  individui perfettamente l'area del parallelogramma che gli stessi vettori definiscono. Con l'aggiunta di un ulteriore vettore che descriva la profondità dello spazio, è possibile studiare il volume del relativo parallelepipedo.

$$\det \begin{bmatrix} \alpha & \alpha' & \alpha'' \\ \beta & \beta' & \beta'' \\ \gamma & \gamma' & \gamma'' \end{bmatrix} \text{ ovvero } (\underline{a} \wedge \underline{b}) \times \underline{c} = \|\underline{a} \wedge \underline{b}\| \|\underline{c}\| \cos \theta \text{ dove } \underline{a} = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix}, \underline{b} = \begin{bmatrix} \alpha' \\ \beta' \\ \gamma' \end{bmatrix}, \underline{c} = \begin{bmatrix} \alpha'' \\ \beta'' \\ \gamma'' \end{bmatrix}$$

La misura dei determinanti è sempre legata ai volumi. Se si desidera calcolare l'analogo in un tetraedro basta ricordare che si tratta di un sesto del parallelepipedo associato.

Anche le **rette**, nello spazio, possono avere una forma cartesiana, anche se nello spazio le rette vengono individuate da due equazioni corrispondenti ai piani che, intersecandosi, individuano una retta in comune.

$$r \rightarrow \begin{cases} ax+by+cz+d=0 \rightarrow \pi \\ a'x+b'y+c'z+d'=0 \rightarrow \pi' \end{cases}$$

Il rango<sup>3</sup> della matrice associata ai coefficienti dev'essere uguale a 2.

E' ovviamente possibile passare dalla forma cartesiana a quella parametrica.

*Esempio.* Si parte da una retta in forma cartesiana individuata dall'intersezione di due piani tra loro incidenti:

$$r \rightarrow \begin{cases} 2x - y + z + 2 = 0 \\ x + 3y - z + 1 = 0 \end{cases}$$

La si vuole quindi passare alla sua corrispondente forma parametrica. Si sceglie quindi di porre  $z=t$  per introdurre il parametro nelle due equazioni:

$$\begin{aligned} x = t - 3y - 1 \quad \text{quindi} \quad 2(t - 3y - 1) + y + t + 2 = 0 \\ 2t - 6y - 2 + y + t + 2 = 0 \quad -7y + 3t = 0 \rightarrow y = \frac{3}{7}t \quad \text{dove} \quad x = t - 3\left(\frac{3}{7}\right)t - 1 = \frac{-2}{7}t - 1 \end{aligned}$$

Quindi la forma parametrica della retta appena indicata è la seguente:

3 **Rango matriciale.** Il rango di una matrice (o caratteristica) possiede valori in un determinato campo ed indica il massimo numero di righe o colonne della matrice che sono tra loro linearmente indipendenti.

$$\begin{aligned}
 x &= \frac{-2}{7}t - 1 \\
 r \rightarrow y &= \frac{3}{7}t \\
 z &= t
 \end{aligned}$$

**Fasci di piani.** Si definiscono tali quegli insiemi di piani che passano tutti per una stessa retta, allora si dicono **fasci di piani propri**. È possibile individuare uno dei piani che appartiene al fascio inserendo le equazioni della retta comune all'interno dell'equazione parametrica di un piano. Si dicono invece **fasci di piani impropri** quei gruppi di piani tra loro tutti paralleli. Essendo paralleli, la direzione a loro perpendicolare risulta essere comune; tuttavia non individuano una retta dal momento che, in teoria, questi piani non si toccano mai tra loro.

**Passare dalla forma cartesiana alla parametrica del piano.** Si parte da un piano in forma cartesiana del tipo  $3x+2y-6z+2=0$  per poi istituire due diversi parametri del tipo  $x=t, y=s$ . La forma parametrica del piano si esprimerà quindi in:

$$\begin{aligned}
 \pi \rightarrow \begin{aligned} x &= t \\ y &= s \\ z &= \frac{3t+2s+2}{6} \end{aligned} \quad \text{quindi} \quad \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{2}{6} \end{bmatrix}}_{P_0} + t \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{3}{6} \end{bmatrix}}_a + s \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{2}{6} \end{bmatrix}}_b
 \end{aligned}$$

**Punto-Piano.** Ci si chiede se il punto Q sta o meno sul piano  $\pi$ . Per verificarlo basta calcolare la distanza del punto dal piano tramite la formula del calcolo della distanza. Se la distanza risulta nulla il punto appartiene al piano.

Oppure si studia se le coordinate del punto annullano l'equazione del piano.

**Punto-Retta.** Ci si chiede se il punto Q giace o meno sulla retta r. Ovviamente il punto sta sulla retta se le sue coordinate annullano l'equazione della retta in forma cartesiana. Se la retta si trova espressa in forma parametrica è meglio convertirla in forma cartesiana per effettuare con più agilità i conti (ovviamente si possono fare anche nella forma parametrica ma la questione tende a complicarsi).

Se il punto non appartiene alla retta se ne calcola la distanza da essa tramite la formula del calcolo della distanza tra punto e retta: si immagina il piano che viene a formarsi tra la retta ed il punto così che si possa applicare la formula della distanza tra punti e rette nel piano. Il piano in questione è individuato da un fascio di piani tutti paralleli tra loro e "perpendicolari" alla retta in questione.

**Retta-Piano.** Una retta potrebbe incidere un piano in un solo punto, giacere sulla sua superficie oppure essere ad esso parallela. Basta calcolare quanti punti in comune hanno retta e piano presi in esame utilizzando la forma cartesiana del piano e quella parametrica della retta:

$$\begin{aligned}
 x &= x_0 + \alpha t \\
 r \rightarrow y &= y_0 + \beta t \quad \pi \rightarrow ax + by + cz + d = 0 \\
 z &= z_0 + \gamma t
 \end{aligned}$$

$$a(x_0+\alpha t)+b(y_0+\beta t)+c(z_0+\gamma t)+d=0 \quad (a\alpha+b\beta+c\gamma)t+ax_0+by_0+cz_0+d=0$$

Se  $a\alpha+b\beta+c\gamma \neq 0$  retta e piano possiedono un punto in comune, quindi sono tra loro incidenti. Detto questo, se  $ax_0+by_0+cz_0+d \neq 0$  retta e piano coincidono, altrimenti retta e piano sono tra loro paralleli. In quest'ultimo caso è possibile effettuare il calcolo della distanza della retta dal piano prendendo in esame un punto generico appartenente alla retta.

La stessa verifica è fattibile utilizzando entrambe le forme cartesiane di retta e piano: si valuta la matrice dei coefficienti associata ed a seconda del valore del rango si può capire come la retta si pone rispetto al piano.

Comunque sia, il piano è sempre preferibile in forma cartesiana.

**Piano-Piano.** Due piani qualsiasi presenti nello spazio possono essere tra loro incidenti in una sola retta, paralleli oppure coincidenti. Si studia, per capire come essi si pongono rispettivamente, quanti punti hanno in comune lavorando con le forme cartesiane di entrambi i piani:

$$\begin{aligned} \pi &\rightarrow ax+by+cz+d=0 \\ \pi' &\rightarrow a'x+b'y+c'z+d'=0 \end{aligned}$$

Si studia quindi il rango della matrice associata ai coefficienti dei due piani:

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d \\ d' \end{bmatrix}$$

Se il sistema ha soluzioni ovviamente c'è un'intersezione tra i piani. Se il rango è pari a 1 a priori non è possibile sapere se ci sono soluzioni; se rimane tale i due piani coincidono, altrimenti se il rango è pari a 1 ma cresce fino a 2 non ci sono soluzioni ed i due piani risultano essere tra loro paralleli. In quest'ultimo caso ha senso voler calcolare la distanza dei due piani.

**Retta-Retta.** Tra tutti i casi di studio sulla mutua posizione questo, nello spazio, risulta essere il più complicato. Due rette nello spazio, infatti, risultano essere tra loro coincidenti, incidenti, parallele oppure sghembe (ovvero quando non sono parallele tra loro ma quando non hanno nemmeno un punto in comune). Poichè non si possono calcolare unicamente i punti che le due rette hanno in comune oppure le loro direzioni, si prendono le forme cartesiane di entrambe le rette:

$$r \rightarrow \begin{aligned} ax+by+cz+d &= 0 \\ a'x+b'y+c'z+d' &= 0 \end{aligned} \quad s \rightarrow \begin{aligned} a''x+b''y+c''z+d'' &= 0 \\ a'''x+b'''y+c'''z+d''' &= 0 \end{aligned}$$

e si ricava la matrice dei coefficienti:

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \\ a''' & b''' & c''' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d \\ d' \\ d'' \\ d''' \end{bmatrix}$$

Si studia quindi il rango della matrice così ottenuta. Se il rango è pari a 3 c'è sicuramente un punto in comune, allora le due rette sono incidenti. Se invece il rango è pari a 2 e cresce non ci sono soluzioni e le rette saranno parallele oppure sghembe, altrimenti se è pari a 2 e

rimane stabile le rette semplicemente coincidono poiché esistono infinite soluzioni. Ovviamente è possibile calcolare la distanza tra le due rette anche quando queste risultano essere sghembe individuando una retta che taglia entrambe in maniera perpendicolare. Siano  $s \rightarrow P - Q_0 = \tau \underline{w}$  ed  $r \rightarrow P - P_0 = t \underline{v}$  le due rette sghembe con  $\|\underline{v}\| = \|\underline{w}\| = 1$  ed i due vettori tra loro non paralleli.

$$\begin{aligned} (P_0 + t \underline{v}) - (Q_0 + \tau \underline{w}) &= t \underline{v} - \tau \underline{w} + P_0 - Q_0 \\ x \underline{v} \rightarrow t - \tau \cos \theta + (P_0 - Q_0) \times \underline{v} &= 0 \\ x \underline{w} \rightarrow t \cos \theta - \tau + (P_0 - Q_0) \times \underline{w} &= 0 \end{aligned} \quad \text{quindi} \quad \det \begin{bmatrix} 1 & -\cos \theta \\ \cos \theta & -1 \end{bmatrix} = -1 - \cos^2 \theta$$

Il determinante può risultare uguale a zero unicamente se uno dei vettori è multiplo del secondo, cosa che però è impossibile per assunzione; quindi la soluzione esiste sempre ed è unica. I punti dove passa la retta sono dati quindi da  $(t, \tau)$ .

## 1.5 Trasformazioni affini

Si indica con il nome di **trasformazioni affini** tutte quelle azioni atte a *spostare oggetti* od a *modificarne forma e dimensione*.

**Scelta di un nuovo sistema di riferimento.** Fino a questo momento si è utilizzato unicamente il sistema di riferimento cartesiano  $P - O = x \underline{e}_1 + y \underline{e}_2$  tuttavia risulta possibile sostituirlo con un differente sistema di riferimento del tipo  $P - O' = x' \underline{a} + y' \underline{b}$ . Per fare ciò bisogna ovviamente capire quale relazione intercorre tra  $x$  ed  $x'$  come tra  $y$  ed  $y'$ .

Si immagini quindi un punto  $P$  generico il quale va definito in relazione al primo sistema di riferimento (quello cartesiano) ma che allo stesso tempo sia definito anche e soprattutto in relazione al nuovo sistema di riferimento.

Per la regola del parallelogramma, sia quindi  $P - O' = (P - O) + (O - O')$  allora:

$$\begin{aligned} x' \underline{a} + y' \underline{b} &= x(\alpha \underline{a} + \beta \underline{b}) + y(\gamma \underline{a} + \delta \underline{b}) = (\alpha x + \gamma y) \underline{a} + (\beta x + \delta y) \underline{b} \quad \text{quindi} \\ \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} &= \underbrace{\begin{bmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & \delta \end{bmatrix}}_A \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} h \\ k \end{bmatrix} = \varphi \end{aligned}$$

Così si definisce la relazione  $\underline{x}' = A \underline{x} + \underline{c}$  dove  $\det(A) \neq 0$ . Si tratta di una trasformazione biunivoca ed invertibile. Tale trasformazione indica la relazione che sussiste tra le coordinate del punto  $P$  all'interno di entrambi i sistemi di riferimento scelti.

Ovviamente è molto importante rispettare l'ordine di esecuzione delle operazioni: pensare di cambiare l'ordine produce degli effetti anche sul risultato finale che potrebbe variare di molto di caso in caso. Ogni tipo di **trasformazione affine** è individuato da una specifica *matrice*  $A$  e da un preciso *vettore*  $\underline{c}$ .

La matrice  $A$  costituisce un'*applicazione vettoriale*, automaticamente diventa anche una *trasformazione lineare non affine*. Nel caso appena preso in esame, però, le due tipologie di trasformazioni coincidono.

### 1.5.1 Trasformazioni nel piano

**Traslazione.** Dato un punto  $R$  generico nel piano lo si vuole spostare, sempre nel piano, in un generico punto  $R'$ : tale **traslazione** avviene grazie ad un vettore  $\underline{w}$  che agisce sul punto  $R \rightarrow R + \underline{w} = R'$ . Il movimento, tuttavia, non interessa solo il punto  $R$  ma anche

tutti i punti presenti sulla traiettoria del vettore spostamento. La traslazione è data dalla seguente trasformazione affine:

$$x' = x + c \quad \text{dove} \quad c = w$$

Quella presa in esame è da considerarsi anche come **affinità**<sup>4</sup>: solitamente però un'affinità è composta non solo da una traslazione ma anche da una trasformazione lineare. Le affinità individuate dal vettore  $w$  costituiscono un *gruppo commutativo* le cui sottoparti possono essere mescolate.

**Rotazione.** Si incomincia studiando il comportamento della rotazione di un punto attorno al centro del sistema di riferimento, ovvero attorno al punto O. La trasformazione affine che ne consegue è la seguente:

$$c = 0, A \in SO(2) \quad \text{con} \quad A = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$$

Tale trasformazione affine fondamentale indica dove finiscono gli apici dei versori del sistema di riferimento. Le colonne della matrice A corrispondono alle coordinate del vettore il quale corrisponde alla posizione ultima del versore che si va a costruire.

Il vettore  $c$  si costruisce andando a vedere dove finisce il punto O durante lo spostamento (in questo caso il punto O rimane fisso).

Una matrice speciale ha determinante uguale a 1.

Una volta studiato il comportamento della rotazione attorno all'origine del sistema di riferimento è possibile determinare una generica rotazione attorno ad un generico punto del piano. Non resta altro da fare che comporre i diversi spostamenti: si trasla il punto generico scelto in O, si effettua la rotazione e si trasla nuovamente tutto nel generico punto del piano da cui tutto è partito.

Una **congruenza diretta** tratta la composizione di movimenti di rotazione e traslazione. Si tratta sempre di *trasformazioni fisicamente eseguibili* dal momento che non alterano né le forme tantomeno le distanze tra i punti. Esistono movimenti che nel piano non possono essere effettuati (come ad esempio i **ribaltamenti**) che comunque risultano essere matematicamente possibili.

**Ribaltamento.** Si incomincia studiando lo specifico caso di un rovesciamento attorno alla retta od asse delle x. La simmetria rispetto all'asse delle x è descritta dalla matrice A come segue:

$$c = 0, A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Una volta studiato il comportamento del ribaltamento nello specifico caso all'asse delle x, per dare luogo ad un rovesciamento rispetto ad una qualsiasi retta nel piano è sufficiente traslare la retta sull'asse delle x, ruotarla rispetto il centro del sistema di riferimento se si tratta di una retta non parallela all'asse delle x, effettuare la riflessione in loco e ricondurre tutto al caso generale. Ovviamente questa procedura introduce numerosi errori, per questo esiste un secondo modo per effettuare dei ribaltamenti: sia r la retta rispetto la quale deve avvenire la riflessione ed R il punto da riflettere in R'.

---

4 **Affinità.** Si tratta di una corrispondenza biunivoca tra due figure piane all'interno della quale è preservato il parallelismo delle rette. Si tratta di una trasformazione affine composta da una trasformazione lineare unita ad una traslazione.

$$R' - R = -2 \operatorname{dist}(R, r) \underline{n} \quad \text{con } P - P_0 \times \underline{n} = 0$$

$$\operatorname{dist}(R, r) = (R - P_0) \times \underline{n} \quad \text{allora } R' - R = -2[(R - P_0) \times \underline{n}] \underline{n} \quad R' = R - 2[(R - P_0) \times \underline{n}] \underline{n}$$

Che non è altro che una trasformazione nel piano di sé stesso. Se il versore normale avesse avuto verso opposto  $\rightarrow R' - R = 2[-(R - P_0) \times \underline{n}] \underline{n}$ .

Le **congruenze** costituiscono un gruppo di trasformazioni del piano che non introducono cambiamenti in distanze ed angoli ma non è detto che siano fisicamente fattibili. Le matrici relative alle congruenze sono del tipo  $A \in O(2)$  le quali sono spesso ortogonali oppure si possono esprimere come:

$$A = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$$

Queste matrici sono dette *matrici non speciali*. Le congruenze spesso non sono fisicamente eseguibili per forza senza uscire dal piano.

**Omotetia.** Termine generale per indicare una **dilatazione/contrazione**. Siano due vettori/segmenti legati dalla relazione  $P' - O = k(P - O)$  con  $k > 0$ . L'omotetia sarà data allora da:

$$c = \underline{0}, A = k I_2$$

Quando l'omotetia non ha centro nel centro del sistema di riferimento è sempre possibile ricondurla a questo caso base combinandola con altre trasformazioni affini come rotazioni o traslazioni. Un'omotetia generica può essere vista anche come una **similitudine** la quale modifica le distanze tra i punti ma lascia invariati gli angoli tra i vettori. La matrice A non è altro che k volte una matrice ortogonale.

### 1.5.2 Affinità speciali

Esistono anche delle affinità speciali.

**Equiaffinità.** Si tratta di particolari trasformazioni che non modificano mai le aree dei poligoni, alterando però tutte le altre misure. Il determinante della matrice A sarà uguale a 1  $\rightarrow$  con un parallelogramma  $\|\underline{a} \wedge \underline{b}\| |\det(A)|$ :

$$\varphi_A = \begin{matrix} \underline{a}' = \varphi_A(\underline{a}) \\ \underline{b}' = \varphi_A(\underline{b}) \end{matrix} \quad \text{quindi } \|\underline{a}' \wedge \underline{b}'\|$$

**Rapporto semplice.** Si tratta del rapporto che sussiste tra tre punti tra loro allineati. Il rapporto semplice di tali punti è dato da:

$$R - P = t(Q - P)$$

dove t costituisce la misura del rapporto tra i punti R,P,Q con RP e QP segmenti associati ai relativi vettori R-P e Q-P.

$$\underline{x}' = A \underline{x} + \underline{c} \rightarrow \varphi_A(R - P) = R' - P' \quad \text{dove } \varphi_A(R - P) = A(R - P)$$

$$R' = A R + \underline{c} \quad P' = A P + \underline{c} \quad \text{allora } (R' - P') = A(R - P)$$

tornando a t:

$$(\underline{R}' - \underline{P}') = \varphi_A(R - P) = \varphi_A[t(Q - P)] = t\varphi_A(Q - P) = t(Q' - P')$$

Ovviamente il rapporto semplice si conserva anche durante le trasformazioni affini.

### 1.5.3 Trasformazioni nello spazio

Le trasformazioni affini nello spazio sono come le trasformazioni affini sul piano, ma in tre dimensioni  $\rightarrow \underline{x}' = A\underline{x} + \underline{c}$  dove A è una matrice 3x3 con determinante diverso da zero. Il fatto che si tratti di una matrice quadrata a tre dimensioni è l'unica differenza apprezzabile rispetto alle trasformazioni affini nel piano. Ovvio che nello spazio il sistema di riferimento è del tipo  $\mathbb{R} = \{O, \langle \underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3 \rangle\}$ .

**Rotazione.** Nello spazio le rotazioni avvengono, contrariamente a ciò che avveniva nel piano con i punti, solamente attorno alle rette. La trasformazione affine relativa alla rotazione attorno all'asse delle z è data da:

$$\underline{c} = 0, A = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Il punto O che è l'origine del sistema di riferimento rimane sempre fisso. Se si tratta della rotazione attorno ad una retta qualunque ovviamente la situazione tende a complicarsi. La retta/asse delle z è orientata quindi va scelto anche il verso della rotazione. Se la retta non possiede un orientamento non cambia nulla neanche a livello di rotazione.

Se la rotazione avviene rispetto ad una retta generica nello spazio, questa va fatta passare per il punto O tramite una traslazione, quindi va "raddrizzata" per farla coincidere con l'asse delle z tramite una rotazione piana. È possibile persino spostare la base dei vettori che originano il sistema di riferimento in maniera tale da farne coincidere il centro con un punto della retta  $\rightarrow \langle \underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3 \rangle = \langle \underline{w}_1, \underline{w}_2, \underline{w}_3 \rangle$ .

$$B = \begin{bmatrix} \frac{\underline{n} \wedge \underline{e}_3}{\|\underline{n} \wedge \underline{e}_3\|} = \underline{w}_1, \underline{n} \wedge \underline{w}_1 = \underline{w}_2, \underline{n} = \underline{w}_3 \end{bmatrix}$$

La matrice appena rappresentata spiega come è possibile convertire il primo sistema di riferimento nel nuovo sistema di riferimento. Tuttavia è interessante, al fine della trasformazione, studiare cosa avviene al contrario  $\rightarrow A = B_T$ . In questa maniera  $\underline{w}_3 = \underline{n}$ . Questo discorso funziona solo per una sola trasformazione; quando si ha a che fare con un'intera famiglia di trasformazioni capita che  $\underline{w}_3 = \underline{n} = \underline{e}_3$  così che B risulti essere una matrice instabile, in questa maniera tutti i conti che deriveranno da essa saranno sbagliati o sballati.

Attraverso l'impiego dei **quaternioni**<sup>5</sup> si evita di incappare nel problema, tuttavia si chiama in ballo una matematica molto complessa tant'è che risulta molto difficile indicare al computer quali atteggiamenti intraprendere a seconda dei casi.

**Ribaltamento.** Il determinante della matrice A in questo caso dev'essere uguale a 1 oppure al suo valore opposto -1. I ribaltamenti nello spazio non sono fisicamente fattibili, purtuttavia matematicamente plausibili:

5 **Quaternioni.** Entità matematiche che estendono i numeri complessi.

$$(P - P_0) \times \underline{n} = 0 \quad \text{allora} \quad R' = R - 2[(R - P_0) \times \underline{n}] \underline{n}$$

Ovviamente lavorando con punti a tre dimensioni. I **movimenti rigidi** sono fisicamente eseguibili ma non fanno parte delle *congruenze*. Tutte queste cose sono comunque *affinità*. Anche in questi casi l'ordine delle operazioni è rilevante per l'ottenimento del giusto risultato finale.

**Omotetia.** Tra cui le *similitudini*. Possiedono le stesse proprietà delle similitudini nel piano:

$$\underline{c} = 0, A = k I_3 \quad \text{con} \quad k > 0$$

### 1.5.4 Affinità piana

Si pensi di aver a che fare con un triangolo inscritto nel tradizionale sistema di riferimento cartesiano che in qualche modo va trasformato in un secondo triangolo scelto a piacere. Si vorrà quindi esprimere una *trasformazione lineare biunivoca* che descriva questa operazione:

$$A = [a|b], \underline{c} = A - O \quad \text{dove} \quad \underline{e}_1 \rightarrow \underline{a}, \underline{e}_2 \rightarrow \underline{b}$$

Il punto O (origine del sistema di riferimento) viene mandato nel vertice A del secondo triangolo. I versori  $\underline{e}_1, \underline{e}_2$  finiscono in  $\underline{a}, \underline{b}$ .

Si può quindi definire una seconda affinità che spiega la trasformazione in un nuovo triangolo:

$$A' = [a'|b'], \underline{c} = A' - O$$

Le affinità non fanno altro che consentire di descrivere come un'oggetto evolve in un altro. Ovviamente la stessa cosa avviene nello spazio con tetraedri al posto di triangoli.

---

## Appunti

*sui piani e spazi affini*



# Capitolo 2

## Curve Differenziabili

### 2.1 Introduzione<sup>[1]</sup>

Una **curva differenziabile** viene definita come l'*immagine*<sup>6</sup> di un'**applicazione** del tipo:

$$P:(a, b) \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n \quad \text{dove } (a, b) \in \mathbb{R} \text{ intervallo chiuso o aperto}$$

Tutte le componenti di  $P$  sono funzioni reali in variabili reali.

$$\begin{matrix} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{matrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{bmatrix} \quad \text{coordinate del vettore } (P(t) - 0)$$

Inoltre si richiede anche così che il **supporto** ottenuto (ovvero il disegno vero e proprio della linea come sequenza di punti) sia quello che comunemente si intende per *curva*. Lo stesso insieme di punti può essere il supporto di una o più curve differenti da quella data. Siccome  $P$  è una *funzione vettoriale* si richiede che ogni sua componente sia derivabile.

$$\dot{P}(t) = \frac{dP}{dt}, \quad \ddot{P}(t) = \frac{d^2P}{dt^2}, \quad \dddot{P}(t) = \frac{d^3P}{dt^3}.$$

La funzione  $P$  deve avere un grado di regolarità sufficiente a giustificare tutti i passaggi effettuati, quindi se si utilizza la derivata  $k$ -esima si sottintende che la funzione considerata sia almeno di classe  $C^k$ . Le condizioni  $C^k$  sono definite solo su intervalli aperti, allora se si ha un'intervallo chiuso del tipo  $[a, b]$  si dirà che la funzione è derivabile nel punto  $a$  se esiste la semiderivata destra in  $a$ , derivabile in  $b$  se esiste la semiderivata sinistra in  $b$ .

#### 2.1.1 Curve regolari

Di solito si considerano solo le **curve regolari**. La funzione  $P$  si dice *regolare* se vale la proprietà  $\dot{P}(t) \neq 0 \forall t \in (a, b)$ : tale condizione garantisce che in ogni punto esiste la retta tangente (vedi *sezione 2.2*). Inoltre la curva si dice *semplice* se  $P$  è iniettiva<sup>7</sup>, *chiusa* se è definita su  $[a, b]$  con  $P(a) = P(b)$ .

### 2.2 Retta Tangente

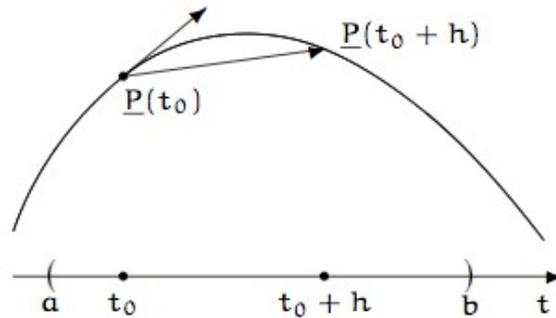
Se una curva è davvero regolare allora esiste, in ogni suo punto, una **retta tangente** ben definita. Nel caso generale di un'intervallo  $(a, b)$  si fissa un certo punto  $t_0$  e si incrementa

---

6 **Immagine di una funzione.** In matematica, l'immagine di un sottoinsieme del dominio di una funzione è l'insieme degli elementi ottenuti applicando la funzione a tale sottoinsieme. Si tratta quindi di un sottoinsieme del codominio della funzione.

7 **Funzione iniettiva.** Una funzione iniettiva, in matematica, è una funzione che porta gli elementi del *dominio* in elementi distinti del *codominio*. In altre parole, ogni elemento dell'immagine è immagine di un solo elemento del dominio.

tale variabile di un valore positivo pari ad  $h$ .



Quindi si passa al limite:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left( \frac{1}{h} \right) (P(t_0 + h) - P(t_0))$$

dal *punto di vista geometrico* il segmento congiungente  $P(t_0)$  e  $P(t_0 + h)$  si sposta fino ad arrivare ad una direzione ben definita che è per convenzione quella della retta tangente alla curva nel punto considerato; dal *punto di vista analitico* invece questo non è altro che il vettore  $\dot{P}(t_0)$ . Siccome la curva è regolare tale espressione ha un risultato diverso da zero, in questa maniera il vettore può individuare la direzione della retta tangente nel punto in questione. La retta tangente nel punto  $P(t)$  risulta coincidere esattamente con lo spazio affine di dimensione 1:

$$(\underline{P}(t), \langle \dot{P}(t) \rangle).$$

### 2.2.1 Curve equivalenti

Vale la pena di riflettere sul perchè invece di chiamare **curva** il *supporto della curva* si preferisce chiamare **curva** l'*applicazione stessa*. La motivazione risiede nel fatto che solitamente si è maggiormente interessati a sapere come il supporto viene percorso; infatti ci sono curve che percorrono lo stesso insieme di punti ma in maniera diversa.

Si dice quindi che due curve  $P:(a, b) \rightarrow E^n$  e  $Q:(c, d) \rightarrow E^n$  sono **equivalenti** se esiste una funzione  $t=t(\tau)$  biunivoca<sup>8</sup>, bicontinua<sup>9</sup> e bidifferenziabile<sup>10</sup> che trasforma l'intervallo  $(c, d)$  nell'intervallo  $(a, b)$  e t.c.  $P[t(\tau)] = Q(\tau)$ .

Se le curve sono tra loro equivalenti anche il loro supporto coincide. Solitamente le curve equivalenti sono entrambe regolari.

L'equivalenza va studiata sempre su intervalli ridotti, poiché se sussiste su tali intervalli non è detto che valga anche per gli interi intervalli delle curve.

### 2.2.2 Curve fortemente regolari

Sia  $P = \underline{P}(t)$  una *curva regolare*, con  $\dot{P}(t) \neq \underline{0}$ . Se vale  $\dot{P}(t) \wedge \ddot{P}(t) \neq \underline{0} \quad \forall t$  allora  $P$  è detta **fortemente regolare**. Le due derivate sono tra loro linearmente indipendenti.

$\dot{P}(t)$  e  $\ddot{P}(t)$  generano assieme a  $\underline{P}(t)$  un piano vettoriale  $\{\underline{P}(t), \langle \dot{P}(t), \ddot{P}(t) \rangle\}$ . Tali vettori sono variabili ed identificano un piano variabile che si muove, chiamato **piano osculatore**, piano ben definito ed ammesso in ogni suo punto se la curva è fortemente

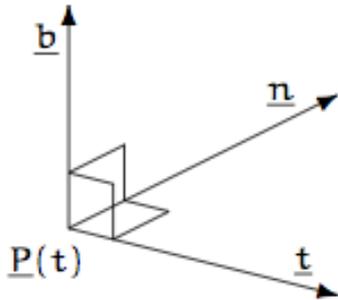
8 **Biunivoca.** La corrispondenza biunivoca tra due insiemi X ed Y è una relazione binaria tra X ed Y tale che ad ogni elemento di X corrisponda uno ed un solo elemento di Y e viceversa.

9 **Bicontinua.** Una funzione bicontinua è una funzione reale a valori reali che sia biunivoca e continua e che abbia la sua funzione inversa continua  $\rightarrow$  *omomorfismo*.

10 **Bidifferenziabile.** Bidifferenziabile implica *bicontinua* e bicontinua implica *biunivoca*.

regolare. Se invece è regolare ma in alcuni punti non è fortemente regolare allora in tali punti il piano osculatore non è definito.

Per ogni punto della curva si può inoltre definire un *piano* sul quale è possibile determinare un **sistema di riferimento affine** e mobile ottenibile dal fisso tramite una certa trasformazione. Il sistema di riferimento sarà dato assegnando una *terna destrorsa*<sup>11</sup>: sarà costituita da 3 vettori mutuamente ortogonali tali che il determinante della matrice ortogonale data dalle loro coordinate sia pari a 1 (e non -1), il che garantisce che esiste un movimento rigido che sposta la terna fissa del sistema di riferimento di  $E^3$  sulla terna mobile. I vettori della terna sono:



$$\underline{t} = \frac{\dot{P}(t)}{\|\dot{P}(t)\|} \quad \underline{n} = \frac{\dot{P}(t) \wedge \ddot{P}(t)}{\|\dot{P}(t) \wedge \ddot{P}(t)\|} \quad \underline{b} = \underline{t} \wedge \underline{n}$$

con  $\underline{t}$  *versore tangente*,  $\underline{n}$  *versore normale principale* e  $\underline{b}$  *versore binormale*. Il terzo vettore è dato sempre dal prodotto vettoriale di ciascuna coppia nel giusto ordine. In questa maniera è garantito che la base  $\{\underline{t}, \underline{n}, \underline{b}\}$  sia ortonormale ed ottenibile da quella fissa tramite un movimento rigido.

Al variare del versore  $\underline{t}$  il sistema si muove. Tramite un **parametro naturale** è possibile ricavare informazioni utili dai vettori, parametrizzando la curva di partenza.

### 2.2.3 Parametro naturale

Rappresentazione fatta attraverso un **parametro naturale** ( $\rightarrow$  *parametro arco*).

Si parte dalla determinazione della lunghezza di un arco di curva, supponendo di aver a che fare con una curva fortemente regolare  $P: (a, b) \rightarrow E^3$ . Si prendono quindi due valori del parametro  $t_1, t_2$  da cui i punti  $P(t_1), P(t_2)$ . Si vuole misurare la lunghezza dell'arco di curva compreso tra questi due punti. Si vanno quindi a considerare un certo numero di punti intermedi  $t_i$  del parametro tra  $t_1$  e  $t_2$ .

La lunghezza dell'arco compreso tra un certo punto  $t_0$  ed una variabile  $t$  corrispondente ad un punto generico risulta essere:

$$s(t) = \int_{t_0}^t \|\dot{P}(\tau)\| d\tau$$

Si tratta infatti della lunghezza con segno misurata a partire da  $P(t_0)$  che tiene conto dell'orientamento che è stato indotto sulla curva da quello naturale di  $\mathbb{R}$ . Siccome si tratta di una funzione integrale, si può calcolare:

$$\frac{ds}{dt} = \|\dot{P}(t)\| > 0$$

perchè la curva è regolare. Allora la funzione  $s = s(t)$  è una funzione derivabile con derivata sempre strettamente positiva, dunque monotona crescente e pertanto invertibile. Esiste allora una certa funzione  $t = t(s)$  che la inverte, anch'essa funzione continua e derivabile.

<sup>11</sup> **Terna destrorsa.** Una terna di vettori  $(u, v, w)$  di uno spazio affine applicati in uno stesso punto di origine  $O$  che sono linearmente indipendenti (quindi non complanari), si dice essere una terna destrorsa se il movimento di rotazione avviene in senso orario. Questo perchè si vuole che lo spostamento della terna dal sistema di riferimento fisso a quello mobile possa avvenire tramite un movimento rigido.

Il tutto serve a dimostrare che nella curva di partenza si può sostituire al posto del parametro  $t$  la funzione  $t = t(s)$  e passare così dalla curva rappresentata in funzione del parametro  $t$  alla curva rappresentata in funzione del parametro  $s$ , dove s'intende  $\underline{P}(s) = \underline{P}[t(s)]$ . Il parametro  $s$  appena introdotto viene comunemente indicato come **parametro naturale** (o parametro arco).

A parte verso e punto di partenza la parametrizzazione è unica.

*Esempio. (Eliche cilindriche) Si supponga di avere una curva così rappresentata.*

$$\begin{aligned} x &= r \cos(t) \\ y &= r \sin(t) \\ z &= kt \end{aligned} \quad \text{Con } t \in \mathbb{R} \text{ e } r, k > 0$$

Si vuole quindi scrivere la curva appena indicata in funzione di un parametro naturale. Si sceglie  $t_0 = 0$ .

$$\begin{aligned} \dot{\underline{P}}(t) &\Leftrightarrow \begin{bmatrix} -r \sin(t) \\ r \cos(t) \\ k \end{bmatrix} \quad \|\dot{\underline{P}}(t)\| = \sqrt{r^2 + k^2} := h \\ s(t) &= \int_0^t h \, d\tau = h[\tau]_0^t = ht \Rightarrow t = \frac{s}{h} \end{aligned}$$

Pertanto in questo caso la rappresentazione parametrica naturale si trova davvero immediatamente:

$$\begin{aligned} x &= r \cos\left(\frac{s}{h}\right) \\ y &= r \sin\left(\frac{s}{h}\right) \\ z &= k\left(\frac{s}{h}\right) \end{aligned}$$

## 2.3 Funzioni intrinseche

Si ha una curva espressa in parametrizzazione naturale e si considera il vettore  $\underline{P}'(s)$  che è il vettore tangente nel generico punto della curva. Si vuole calcolare i versori del piano osculatore a partire da una curva parametrizzata. Tale vettore è in realtà un versore per ogni valore  $s$  del parametro. Si può quindi considerare il vettore come

$$\underline{P}'(s) = \frac{d\underline{P}}{ds} = \frac{d\underline{P}}{dt} \frac{dt}{ds} \quad \underline{t}(s) = \underline{P}'(s)$$

dove  $\underline{t}(s)$  sarà il primo dei tre versori del sistema di riferimento intrinseco da associare alla curva. Di solito il vettore derivato di un versore in funzione di un parametro è sempre perpendicolare al versore di partenza. Poiché la curva è fortemente regolare il vettore normale può essere definito come

$$\underline{n}(s) = \frac{\underline{P}''(s)}{\|\underline{P}''(s)\|}$$

La funzione  $c(s)=\|P''(s)\|$  si dice **curvatura** della curva. Il terzo versore detto versore binormale è definito come

$$\underline{b}(s)=\underline{t}(s)\wedge\underline{n}(s)$$

La terna è costituita da tre versori dipendenti da  $s$ ; l'ordine è importante perchè si vuole un sistema di riferimento mobile destrorso e quindi ottenibile dalla terna del sistema di riferimento fisso in maniera tale che il movimento che porta la prima terna nella seconda sia rigido<sup>12</sup>. Siccome il piano osculatore è definito come il piano che passa per un certo punto generato da  $\underline{P}', \underline{P}''$  si può dire che esso ha come spazio direttore lo spazio generato da  $\underline{t}$  ed  $\underline{n}$ . Inoltre il piano generato dai versori  $\underline{n}$  e  $\underline{b}$  è detto *piano normale*, il piano generato da  $\underline{t}$  e  $\underline{b}$  è detto *piano rettificante*.

Si dice **torsione**  $\tau(s)$  della curva il coefficiente con cui si decompone il vettore derivato del versore normale principale rispetto al versore binormale. Si va a considerare come varia il sistema di riferimento mobile rispetto a sé stesso. Per sapere come varia il sistema di riferimento in generale si derivano i versori che danno il sistema rispetto alla variabile  $s$ . Esistono 3 formule molto semplici che esprimono la decomposizione dei vettori derivati rispetto al sistema di riferimento mobile che prendono il nome di **Formule di Frénet**:

$$\begin{aligned} \underline{t}'(s) &= c(s)\underline{n}(s) \\ \underline{n}'(s) &= -c(s)\underline{t}(s) + \tau(s)\underline{b}(s) \\ \underline{b}'(s) &= -\tau(s)\underline{n}(s) \end{aligned}$$

La *torsione* misura la velocità del movimento del piano osculatore; più è veloce il piano osculatore meno la curva sarà piana (se si parla di curve spaziali). Le curve piane hanno il valore della torsione pari a zero, per esse conta molto il valore della curvatura che indica il fattore di "rotondità" in ogni punto della curva.

### 2.3.1 Curvatura e torsione

Così si calcolano in *forma teorica* **curvatura** e **torsione** per una data curva.

$$c(s)=\|P''(s)\| \quad \tau(s)=\frac{\det[P'(s)|P''(s)|P'''(s)]}{c(s)^2} \quad \text{con } \{c(s), \tau(s)\} \quad s \in [\alpha, \beta]$$

A partire da queste due funzioni all'interno di un dato intervallo, a meno di una speciale rototraslazione, si definisce la curva di partenza. Curvatura e torsione sono dette **funzioni intrinseche**.

Poichè il metodo precedente consente il calcolo delle due *funzioni intrinseche* solo a livello teorico, è possibile effettuarlo anche a livello pratico per rendere il loro utilizzo più utile e performante. Curvatura e torsione possono essere calcolate anche per una qualsiasi curva non sottoposta a parametrizzazione naturale (quindi la curva in questione è assegnata attraverso un parametro  $t$  qualunque):

$$c(t)=\frac{\|\dot{\underline{P}}(t)\wedge\ddot{\underline{P}}(t)\|}{\|\dot{\underline{P}}(t)\|^3} \quad \tau(t)=\frac{\det[\dot{\underline{P}}(t)|\ddot{\underline{P}}(t)|\ddot{\underline{P}}(t)]}{\|\dot{\underline{P}}(t)\wedge\ddot{\underline{P}}(t)\|^2}$$

<sup>12</sup> **Movimento rigido.** In  $\mathbb{R}^n$  si tratta di un isomorfismo affine  $\rho: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  della forma

$\rho(x)=Ax+b$  dove  $b \in \mathbb{R}^n$ . In particolare quando  $n=3$  ogni movimento rigido è esprimibile mediante una rotazione attorno ad una retta passante per l'origine seguita da una traslazione.

Nelle **curve piane** il significato geometrico della curvatura è molto importante. Si considerano le curve piane come *curve spaziali* con torsione nulla, per questo la curvatura è sempre positiva o negativa. Il segno della curvatura è importante per capire come si evolve la curva, se verso l'alto oppure verso il basso. Una curva piana con curvatura nulla è identificabile in una retta. Cambiando il verso di percorrenza cambia anche il segno della curvatura.

**Intorno tubolare.** Per ricostruire una curva si scelgono dei punti e li si interpola. Ogni curva tradizionalmente possiede un intorno tubolare individuato dalle rette che tagliano perpendicolarmente la curva (nel piano e nello spazio). Una metodica di successo per individuare una curva è sfruttare il suo intorno tubolare.

Si può effettuare il **controllo della bontà** di una curva interpolata sfruttando le funzioni di *curvatura* e *torsione* (ma solo nel caso spaziale). Si studia allora la distanza tra i punti della curva interpolata e quelli della curva obiettivo. Curvatura e torsione hanno il potere di rendere la geometria individuata più congrua e similmente vicina a quella della curva obiettivo.

### 2.3.2 Circonferenza osculatrice

La **circonferenza osculatrice** è individuata dal **piano osculatore** che taglia la **sfera osculatrice**. Il centro della sfera è posizionato nel cosiddetto asse polare, ovvero sulla retta perpendicolare al piano osculatore che incrocia la retta individuata dal versore normale nel punto di coordinate  $(0, \frac{1}{c}, 0)$  che funge da centro della circonferenza osculatrice. Il *raggio* di tale circonferenza osculatrice è allora l'esatto reciproco in valore assoluto del valore della *curvatura*. La circonferenza osculatrice può essere definita come la circonferenza che, tra tutte le circonferenze che passano per un qualsiasi punto della curva, può sostituirsi alla curva in quel punto. Il valore del raggio è una misura utile per capire quanto la curva sia "tondeggiante" in quel preciso punto. Il luogo dei centri di tutte le circonferenze del fascio di circonferenze individuate passanti per quel preciso punto della curva individua una retta perpendicolare alla curva in quel punto.

## 2.4 Problema dell'incollamento

Le curve si definiscono su **intervalli chiusi e limitati** pur tuttavia **adiacenti** e devono, per questo motivo, essere opportunamente incollate tra loro.

Si considerano due curve  $\underline{P}:(a, b), \underline{Q}:(b, c)$ . Si vuole realizzare il loro **incollamento**.

Incollamento di classe  $C^0$  → È innanzitutto fondamentale che il punto finale della prima curva considerata ed il punto iniziale della seconda curva coincidano →  $\underline{P}(b)=\underline{Q}(b)$  in questa maniera si realizza l'incollamento effettivo, ma non basta a definire l'incollamento reale (si possono venire a creare, infatti dei **punti angolosi** se ci si limita a rispettare questa proprietà).

Incollamento di classe  $C^1$  → Le rette tangenti all'ultimo punto della prima curva ed al primo punto della seconda curva devono coincidere →  $\dot{\underline{P}}(b)=\dot{\underline{Q}}(b)$ .

Incollamento di classe  $C^2$  → Non solo le rette tangenti coincidono, ma devono coincidere anche i vettori tangenti all'ultimo punto della prima curva ed al primo punto della seconda curva →  $\ddot{\underline{P}}(b)=\ddot{\underline{Q}}(b)$ . In questa maniera si garantisce la variazione continua della retta

tangente ma anche del vettore tangente ad ogni punto della curva risultante, oltre alla variazione continua della curvatura e del piano osculatore, ecc. In questa maniera si creerà una curva decisamente più bella.

Si tratta di condizioni molto restrittive, così capita di utilizzarne di più rilassate.

Incollamento di classe  $G^1$   $\rightarrow \underline{P}(b) = \alpha \underline{Q}(b)$  con  $\alpha > 0$  così il punto in questione non serve sia esattamente corrispondente in entrambe le curve, a meno di un parametro.

Incollamento di classe  $G^2$   $\rightarrow \underline{\ddot{Q}}(b) = \beta \underline{\dot{P}}(b) + \alpha^2 \underline{\ddot{P}}(b)$  dove il parametro  $\alpha$  è identico a quello della condizione  $G^1$ . Questa condizione implica anche le sottostanti  $G^1$  e  $G^0$ .

Si calcola quindi la curvatura sulla curva  $\underline{P}$  in corrispondenza di  $b$  e, allo stesso modo, si ripete il calcolo per la curva  $\underline{Q}$  nello stesso punto  $b$ .

$$c(b) = \frac{\det[\underline{\dot{P}}(b) | \underline{\ddot{P}}(b)]}{\|\underline{\dot{P}}(b)\|^3} \quad c(b) = \frac{\det[\alpha \underline{\dot{P}}(b) | \beta \underline{\dot{P}}(b) + \alpha^2 \underline{\ddot{P}}(b)]}{\|\alpha \underline{\dot{P}}(b)\|^3} = \frac{\alpha^3 \det[\underline{\dot{P}}(b) | \underline{\ddot{P}}(b)]}{|\alpha|^3 \|\underline{\dot{P}}(b)\|^3}$$

Si ottiene così l'esatta curvatura di  $\underline{P}$ . Il vettore tangente alla circonferenza è relativo al suo raggio. Decidere se un incollamento è della stessa classe non è possibile ad occhio e bisogna per forza effettuare i dovuti calcoli.

## Appunti

*sulle curve differenziabili*

# Capitolo 3

## Curve di Bèzier

### 3.1 Introduzione<sup>[2]</sup>

Le **curve di Bèzier** sono curve *polinomiali*. L'idea è quella di definire una curva che segua il comportamento di una speciale poligonale decisa a priori, detta **poligono di controllo**. Queste curve sono ottenibili in diversi metodi, tra i quali i più famosi sono l'**algoritmo ricorsivo** di **De Casteljau** ed il metodo *diretto* costituito dai **polinomi di Bernstein**.

Il polinomio che descrive una curva di Bèzier è sempre di grado  $k \geq 2$ . Non è detto che le curve di Bèzier siano anche curve regolari. Il *poligono di controllo* da cui dipendono tali curve è formato da una serie di punti, detti **punti di Bèzier**, i quali sono in numero pari a  $k+1$ ; si può quindi dire che il grado della curva dipenda dal numero dei vertici del poligono di controllo.

Si ricorda che s'intende per *curva differenziale regolare* un'applicazione del tipo:

$$P: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3$$

che sia continua e derivabile, con derivata continua e tale che  $\frac{dP}{dt} \neq 0 \forall t \in [0, 1]$ .

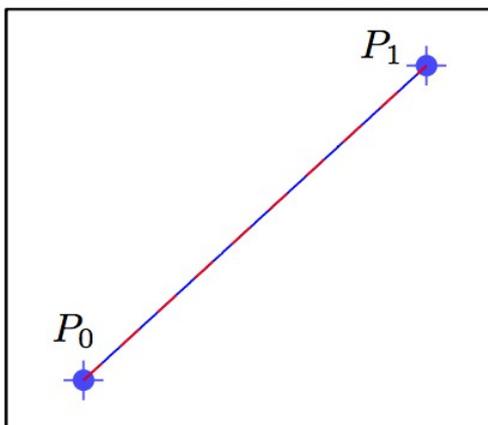
### 3.2 Algoritmo di De Casteljau

Il primo metodo per definire una curva di Bèzier è l'*algoritmo ricorsivo di De Casteljau*. Dati  $k$  punti  $\underline{P}_0, \underline{P}_1, \dots, \underline{P}_k \in E^3$  e  $t \in [0, 1]$  l'algoritmo è così definito:

$$\underline{P}_i^0(t) = \underline{P}_i \quad \underline{P}_i^r(t) = (1-t)\underline{P}_i^{r-1}(t) + t\underline{P}_{i+1}^{r-1}(t) \quad \text{con } r=1, \dots, k \text{ e } i=0, \dots, k-r$$

La formula appena espressa può essere intesa come un *generico passo dell'algoritmo*. La curva di Bèzier costruita con questo metodo prende la forma di  $P(t) = \underline{P}_0^k(t)$ . Come già accennato il grado della curva è legato al numero dei punti del poligono di controllo.

$(1-t)$  e  $t$  sono i mattoni grazie ai quali è possibile costruire una curva di Bèzier. Un eventuale cambio di parametro del tipo  $\tau = 1-t$  non fa altro che percorrere la curva nella medesima direzione.



#### 3.2.1 Curve di Bèzier di grado 1 $\rightarrow k=1$

Con **grado = 1** la curva di Bèzier risulta essere un semplice segmento. Tale curva di Bèzier è definita come **curva di Bèzier lineare**. Infatti

$$P(t) = \underline{P}_0^1(t) = (1-t)\underline{P}_0 + t\underline{P}_1.$$

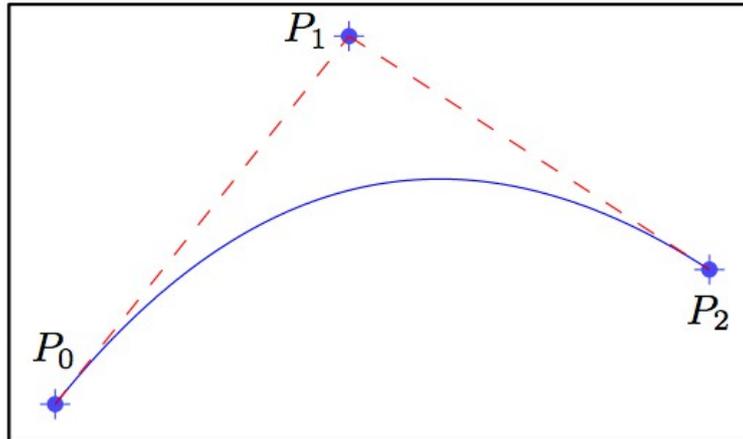
dove  $\underline{P}_0 = (1, 1)$ ,  $\underline{P}_1 = (3, 2)$  sono i punti che determinano il poligono di controllo della curva. Poiché tra due

punti passa una ed una sola retta, il poligono di controllo di questa curva altro non è che il segmento individuato da questi due punti.

### 3.2.2 Curve di Bèzier di grado 2 → k=2

Se la curva di Bèzier è di **grado = 2** si otterrà un poligono di controllo con 3 vertici (quindi formato da due distinti segmenti consecutivi tra loro). Tali punti non allineati possono a loro volta definire un piano (tra 3 punti non allineati passa uno ed un solo piano) se si parla di curve spaziali.

Tale curva di Bèzier è detta **curva di Bèzier quadratica**.



Per costruire la curva a partire da questo poligono di controllo è necessario parametrizzare ciascun segmento  $\underline{P_0P_1}, \underline{P_1P_2}$  individuando così delle sotto-curve di grado = 1.

$$\underline{P_0^1}(t) = (1-t)\underline{P_0} + t\underline{P_1} \quad \underline{P_1^1}(t) = (1-t)\underline{P_1} + t\underline{P_2}$$

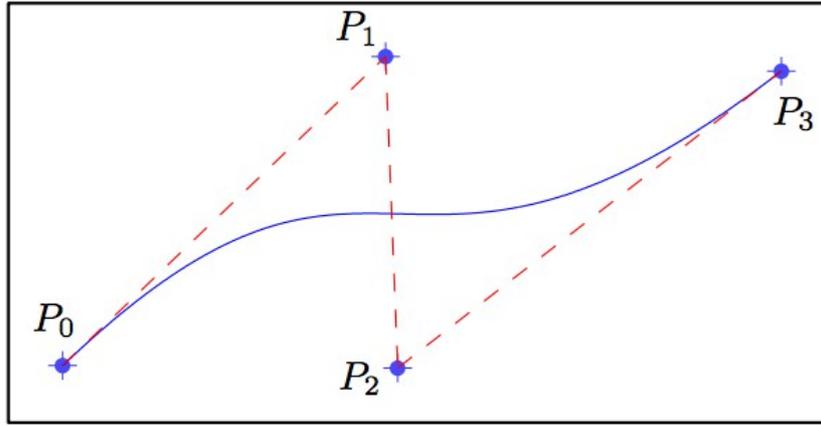
Va da sé che i punti  $\underline{P_0^1}(t), \underline{P_1^1}(t)$  determinano un nuovo segmento da parametrizzare in una curva. Per trovare tutti i punti della curva di Bèzier finale conviene effettuare tutti i calcoli del caso mediante l'algoritmo esteso di De Casteljau.

$$\underline{P_0^2}(t) = (1-t)[(1-t)\underline{P_0} + t\underline{P_1}] + t[(1-t)\underline{P_1} + t\underline{P_2}] = (1-t)^2\underline{P_0} + 2t(1-t)\underline{P_1} + t^2\underline{P_2}$$

Le curve di Bèzier di grado = 2 sono *piane* ed identificano degli *archi di parabola*. Ogni curva di Bèzier passa per i punti iniziali e finali del poligono di controllo (quindi si può dire che i punti iniziali e finali del poligono sono anche i punti iniziali e finali della curva stessa). Il poligono di controllo di una curva di questo tipo può essere completato al fine di individuare un **parallelogramma**. La diagonale maggiore di questo parallelogramma taglia nel mezzo la curva di Bèzier. Il *supporto* della curva è tutto compreso all'interno del triangolo formato dai vertici del suo poligono di controllo  $\underline{P_0}, \underline{P_1}, \underline{P_2}$ , detto **involucro convesso**.

### 3.2.3 Curve di Bèzier di grado 3 → k=3

Se la curva di Bèzier ha grado = 3 si parla di una **curva di Bèzier cubica** ed individua, nel suo poligono di controllo formato da 4 vertici, un arco di cubica gobba.



$$\underline{P}_0^3(t) = (1-t)^3 \underline{P}_0 + 3t(1-t)^2 \underline{P}_1 + 3t^2(1-t) \underline{P}_2 + t^3 \underline{P}_3$$

L'ordine in cui si considerano i punti del poligono di controllo è molto importante. Infatti due curve di Bèzier con gli stessi punti del poligono di controllo ma considerati in ordine diverso, sono effettivamente diverse.

Il segmento  $\underline{P}_2 \underline{P}_3$  individua la retta tangente alla curva al punto  $\underline{P}_3$  del poligono di controllo (che come già detto è anche un punto appartenente alla curva di Bèzier) e vale lo stesso per il punto di partenza della curva ed il primo segmento del poligono di controllo.

Anche nel caso di una curva di grado=3 il poligono di controllo può essere completato da un **tetraedro** nel caso di punti non complanari (anziché un parallelogramma), allora la curva ottenuta sarà un arco di gobba. Il supporto di questa curva è ancora compreso nell'involucro convesso del tetraedro.

### 3.3 Polinomi di Bernstein

I **polinomi di Bernstein** costituiscono la *maniera più diretta* per la determinazione di una curva di Bèzier. Per ogni  $k \geq 1$  e per ogni  $i = 0, \dots, k$  si definisce *i-esimo polinomio di Bernstein di grado k*

$$B_i^k(t) = \binom{k}{i} t^i (1-t)^{k-i} \quad \underline{P}_0^k(t) = \sum_{i=0}^k B_i^k(t) \underline{P}_i$$

$$B_0^0(t) \equiv 1 \quad B_i^k(t) \equiv 0 \quad \text{per } i \notin \{0, \dots, k\}$$

#### 3.3.1 Proprietà dei polinomi di Bernstein

**[1] Proprietà.** Ogni polinomio di Bernstein di grado k può essere espresso ricorsivamente mediante la relazione  $B_i^k(t) = (1-t) B_i^{k-1}(t) + t B_{i-1}^{k-1}(t)$ .

**[2] Proprietà.** Vale la seguente uguaglianza:

$$\sum_{i=0}^k B_i^k(t) \equiv 1 \rightarrow 1 = (t + (1-t))^k = \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} t^i (1-t)^{k-i} = \sum_{i=0}^k B_i^k(t)$$

**[3] Proprietà.** Sono tutte funzioni non negative nell'intervallo  $[0, 1]$ .

**[4] Proprietà.** Data una curva di Bèzier, se si vuole operare una trasformazione affine, si assegna un certo insieme di valori al parametro t. Si tratta però di un metodo molto

dispendioso. Tuttavia, il fatto stesso che si tratti di una curva di Bèzier aiuta a trasformare solo i punti/vertici del poligono di controllo così da ritrovare, nella nuova curva venutasi a creare a partire dal nuovo poligono di controllo, la trasformata della curva di partenza.

$$\underline{P}(t) = \sum_{i=0}^k B_i^k(t) \underline{P}_i \quad \text{con} \quad A, \underline{c} \rightarrow \underline{x}' = A \underline{x} + \underline{c}$$

allora

$$\begin{aligned} \underline{P}(t) &= A \underline{P}(t) + \underline{c} = \left\{ \sum_{i=0}^k B_i^k(t) A \underline{P}_i \right\} + \underline{c} & \underline{Q}_i &= A \underline{P}_i + \underline{c} \\ \underline{Q}(t) &= \sum_{i=0}^k B_i^k(t) \underline{Q}_i = \sum_{i=0}^k B_i^k(t) (A \underline{P}_i + \underline{c}) = \left\{ \sum_{i=0}^k B_i^k(t) A \underline{P}_i \right\} + \underline{c} \end{aligned}$$

Le coordinate dei punti di una curva di Bèzier sono invarianti per trasformazioni affini: infatti l'algoritmo si basa su una successione di interpolazioni lineari, quindi individua tutti i punti della curva mediante le coordinate baricentriche dei punti dei segmenti del poligono di controllo. Quindi, data un'affinità  $\varphi$  di  $E^3$ ,  $\forall r=1, \dots, k$  e  $\forall i=0, \dots, k-r$  vale:

$$\varphi(\underline{P}(t)) = \sum_{i=0}^k \varphi(\underline{P}_i) B_i^k(t)$$

Allora la curva trasformata tramite  $\varphi$  è semplicemente la curva di Bèzier avente come punti del poligono di controllo i punti trasformati tramite  $\varphi$ .

**[5] Proprietà.** Qualsiasi curva di Bèzier passa per il primo ed ultimo punto del poligono di controllo. Basta osservare che

$$\begin{aligned} B_i^k(0) &= 1 \Leftrightarrow i=0 \quad \text{altrimenti} \quad B_i^k(0)=0 \\ B_i^k(1) &= 1 \Leftrightarrow i=k \quad \text{altrimenti} \quad B_i^k(1)=0 \end{aligned}$$

infatti

$$\underline{P}(0) = \sum_{i=0}^k B_i^k(0) \underline{P}_i = \underline{P}_0 B_0^k = \underline{P}_0 \quad \underline{P}(1) = \sum_{i=0}^k B_i^k(1) \underline{P}_i = \underline{P}_k B_k^k = \underline{P}_k$$

**[6] Proprietà (Simmetria).** I polinomi di Bernstein sono simmetrici rispetto a  $t$  ed a  $1-t$ .

$$B_i^k(t) = B_{k-i}^k(1-t) \quad \text{allora vale} \quad \underline{P}_0^k(t) = \sum_{i=0}^k B_i^k(t) \underline{P}_i = \sum_{j=0}^k B_j^k(1-t) \underline{P}_{k-j}$$

Quindi la curva di Bèzier avente come punti del poligono di controllo  $\underline{P}_0, \dots, \underline{P}_k$  ha lo stesso supporto di quella che ha come punti del poligono di controllo  $\underline{P}_k, \dots, \underline{P}_0$  ma non solo: il supporto viene percorso nei due casi in verso opposto.

Il comportamento curioso dei *grafi di dipendenza* che illustrano l'evolversi dei polinomi di Bernstein risulta essere tale a causa di questa proprietà. Si tratta di un comportamento utile da studiare specialmente nel caso di studio di *spline*.

### 3.3.2 Derivate delle curve di Bèzier

Nel caso delle curve di Bèzier calcolare la loro **funzione derivata** in un punto qualsiasi implica individuare la **retta tangente** in quel punto alla curva.

$$\frac{d\underline{P}}{dt} = \sum_{i=0}^k [B_i^k(t)] \underline{P}_i = \dot{\underline{P}}(t)$$

Si calcola come:

$$\binom{k}{i} (1-t)^{k-i} t^i \rightarrow \binom{k}{i} \{ (k-i)(1-t)^{k-i-1} (-1)t^i + (1-t)^{k-i} i t^{i-1} \}$$

$$\frac{k(k-1)!}{(k-i)!(i-1)!} (1-t)^{k-i} t^{i-1} - \frac{k(k-1)!}{(k-1-i)!i!} (1-t)^{k-i-1} t^i$$

Si può quindi esprimere la **derivata prima** come  $\dot{\underline{P}}(t) = \sum_{i=0}^k k [B_{i-1}^{k-1}(t) - B_i^{k-1}(t)] \underline{P}_i$ .

Per ogni  $j=0, \dots, k-1$  si può definire l'*operatore*  $\Delta \underline{P}_j = \underline{P}_{j+1} - \underline{P}_j$ . Tale operatore esprime la **differenza**, per ogni coppia di vertici consecutivi del poligono di controllo, del secondo vertice rispetto il primo. Quindi, a fronte di questa definizione si può riscrivere la derivata prima della curva di Bèzier come segue:

$$\dot{\underline{P}}(t) = k \sum_{i=0}^{k-1} B_i^{k-1}(t) \Delta(\underline{P}_i)$$

Si tratta di un meccanismo molto utile per individuare con quale tangente parte la curva nel suo punto di partenza (coincidente col primo punto del poligono di controllo). Idem per quanto riguarda l'ultimo punto della curva. In entrambi i casi le rette tangenti sono rispettivamente proporzionali ai **segmenti** individuati dai primi due vertici del poligono di controllo e dal segmento individuato dagli ultimi due.

$$\dot{\underline{P}}(0) = k (\underline{P}_1 - \underline{P}_0) \quad \dot{\underline{P}}(1) = k (\underline{P}_k - \underline{P}_{k-1})$$

Il vettore tangente può essere ulteriormente parafrasato come segue:

$$\dot{\underline{P}}(t) = k \Delta \left( \sum_{i=0}^{k-1} B_i^{k-1}(t) \underline{P}_i \right) \quad \text{dove} \quad \Delta(\alpha \underline{P}_2 - \beta \underline{P}_1) = \alpha \Delta(\underline{P}_2) - \beta \Delta(\underline{P}_1)$$

Il valore di  $\Delta$  di una qualsiasi curva di Bèzier è dato dalla sottrazione tra gli ultimi due valori dell'ultimo passaggio dell'algoritmo di De Casteljau. Tutto ciò prende evidente senso all'interno del disegno della curva stessa. Nel punto  $\underline{P}_0^3(t)$  (nel caso di una curva di Bèzier di grado=3) il vettore tangente funge da cursore che sposta la curva, identificato a sua volta dagli ultimi due valori dell'algoritmo nel suo ultimo passo.

**Derivate di grado *r*-esimo.** Si incomincia estendendo la definizione di  $\Delta$ :

$$\Delta^r \underline{P}_j = \Delta^{r-1} \underline{P}_{j+1} - \Delta^{r-1} \underline{P}_j \quad \text{con} \quad \forall r \geq 1, \forall j = 0, \dots, k-1 \quad \text{dove} \quad j = 0, \dots, k \quad \Delta^0 \underline{P}_j = \underline{P}_j$$

generalizzando quanto visto sinora:

$$\frac{d^r \underline{P}(t)}{dt^r} = \frac{k!}{(k-r)!} \sum_{i=0}^{k-r} B_i^{k-r}(t) \Delta^r(\underline{P}_i)$$

con **r** inteso come *grado della derivata* e **k** come *grado della curva di Bèzier*.

### 3.3.3 Involucro convesso

L'involucro convesso di una curva può diventare molto grande a seconda (ma non solo) del grado della curva stessa. Lo si può quindi suddividere individuando un involucro convesso per ogni sotto-arco così da ridurre l'involucro convesso di partenza. La cosa ha senso poiché le sotto-curve della curva di partenza non si intersecano (per ovvi motivi).

### 3.3.4 Innalzamento di grado

Si suppone di avere una curva di Bèzier di grado  $k$ , con punti del poligono di controllo del tipo  $\underline{P}_0, \underline{P}_1, \dots, \underline{P}_k$  e che da questa curva si voglia ottenere una curva di grado  $k+1$  ma con il medesimo supporto (ovvero, la curva rimane sempre la stessa ma cambia il suo poligono di controllo: ci si chiede se poligono di controllo con un vertice in più rispetto il precedente può dare luogo alla stessa curva di partenza). Intanto i nuovi punti del nuovo poligono di controllo devono rispettare questa proporzione:

$$\underline{Q}_i = \frac{j}{k+1} \underline{P}_{i-1} + \left(1 - \frac{j}{k+1}\right) \underline{P}_i.$$

Ovviamente i punti del nuovo poligono dipendono direttamente dai vertici del vecchio poligono.

$$\underline{P}(t) = \sum_{j=0}^{k+1} B_j^{k+1}(t) \underline{Q}_j$$

Allora si ottiene:

$$\sum_{i=0}^k \binom{k}{i} (1-t)^{k+1-i} t^i \underline{P}_i + \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} (1-t)^{k-i} t^{i+1} \underline{P}_i = \sum_{j=0}^{k+1} \binom{k+1}{j} (1-t)^{k+1-j} t^j \underline{Q}_j$$

ma  $(1-t)^{k+1-j} t^j \rightarrow i+1 = j; i = j-1$  allora

$$\binom{k}{j} \underline{P}_j + \binom{k}{j-1} \underline{P}_{j-1} = \binom{k+1}{j} \underline{Q}_j$$

*Esempio.* Si considera una curva di Bèzier di grado=3 avente in qualità di punti del poligono di controllo  $\underline{P}_0, \underline{P}_1, \underline{P}_2, \underline{P}_3$  quindi i vertici del nuovo poligono di controllo verranno calcolati come segue:

$$\begin{aligned} \underline{Q}_0 &= \underline{P}_0 \\ \underline{Q}_1 &= \frac{1}{4} \underline{P}_0 + \left(1 - \frac{1}{4}\right) \underline{P}_1 = \underline{P}_0 + \frac{3}{4} (\underline{P}_1 - \underline{P}_0) \\ \underline{Q}_2 &= \frac{2}{4} \underline{P}_1 + \left(1 - \frac{2}{4}\right) \underline{P}_2 = \underline{P}_1 + \frac{1}{2} (\underline{P}_2 - \underline{P}_1) \\ \underline{Q}_3 &= \frac{3}{4} \underline{P}_2 + \left(1 - \frac{3}{4}\right) \underline{P}_3 = \underline{P}_2 + \frac{1}{4} (\underline{P}_3 - \underline{P}_2) \\ \underline{Q}_4 &= \underline{P}_3. \end{aligned}$$

La relazione che intercorre tra i punti dei due poligoni di controllo può essere descritta da una matrice di rango massimo. Si tratta di una matrice colonna formale dal momento che gli elementi costituenti sono a loro volta vettori ed una matrice di 5 colonne è essenziale per dare come risultante un vettore colonna con 5 righe  $\rightarrow \underline{Q} = A \underline{P}$  dove  $A$  è la matrice di rango massimo.

$$\begin{bmatrix} \underline{Q}_0 \\ \underline{Q}_1 \\ \underline{Q}_2 \\ \underline{Q}_3 \\ \underline{Q}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{P}_0 \\ \underline{P}_1 \\ \underline{P}_2 \\ \underline{P}_3 \end{bmatrix}$$

Si può innalzare il grado pressoché all'infinito così da individuare una poligonale più congrua possibile al supporto della curva, secondo le necessità. Se si ripete il procedimento di innalzamento infinite volte il poligono di controllo coinciderà con il supporto stesso della curva. Inoltre il nuovo poligono di controllo sarà sempre contenuto nell'involucro convesso del vecchio poligono di controllo.

L'innalzamento è possibile solo per le curve di Bèzier, utile a livello di incollamento tra curve le quali, per operare un incollamento perfetto, devono essere entrambe dello stesso grado.

**Abbassamento di grado.** Innalzare il grado di una curva di Bèzier è sempre possibile ma non si può dire lo stesso della procedura per abbassarne il grado. In questo caso ovviamente saranno noti i punti di  $\underline{Q}$  mentre le incognite saranno i vertici di  $\underline{P}$ .

Si sfrutta a tal proposito l'**inversa sinistra** della matrice che descrive l'innalzamento di grado da  $\underline{P}$  a  $\underline{Q}$ . Se esiste l'*inversa sinistra* di una certa matrice allora questa è unica, tale che se moltiplicata per la sua matrice di partenza si ottiene come risultato una matrice identità.

$$A^+ A = I \rightarrow A^+ Q = A^+ A P = P$$

La matrice inversa sinistra esiste solo se la sua matrice di partenza ha grado massimo. Sfruttare la matrice inversa della matrice che descrive l'innalzamento di grado implica lo sfruttamento di soluzioni approssimate di un sistema che non ha soluzioni naturali. Tali soluzioni descrivono una curva approssimata ma accettabile.

## 3.4 Interpolazione di curve di Bèzier

### 3.4.1 Interpolazione di Lagrange

Le curve di Bèzier possono essere espresse anche in **forma matriciale**, riportando ogni polinomio di Bernstein che le caratterizzano.

$$\underline{P}_0^3(t) = [\underline{P}_0 \underline{P}_1 \underline{P}_2 \underline{P}_3] \begin{bmatrix} B_0^0(t) = (1-t)^3 = 1 - 3t + 3t^2 - t^3 \\ B_0^1(t) = 3(1-t)^2 t = 3t - 6t^2 + 3t^3 \\ B_0^2(t) = 3(1-t)t^2 = 3t^2 - 3t^3 \\ B_0^3(t) = t^3 \end{bmatrix}$$

Tale forma matriciale esprime il legame tra i polinomi di Bernstein ed i vertici del poligono di controllo della curva. Ovviamente a seconda del grado della curva di Bèzier esiste una

ben specifica forma matriciale (questa nell'esempio è la forma matriciale di una curva di Bèzier di grado=3). Si può riassumere tutto in una seconda forma:

$$\underline{P}_0^3(t) = [\underline{P}_0 \ \underline{P}_1 \ \underline{P}_2 \ \underline{P}_3] \begin{bmatrix} 1 & -3 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & -6 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ t \\ t^2 \\ t^3 \end{bmatrix}$$

Forma che a sua volta può essere generalizzata come segue:

$$\underline{P}_0^3(t) = [\underline{A}_0 \ \underline{A}_1 \ \underline{A}_2 \ \underline{A}_3] \begin{bmatrix} 1 \\ t \\ t^2 \\ t^3 \end{bmatrix} = \underline{A}_0 + t \underline{A}_1 + t^2 \underline{A}_2 + t^3 \underline{A}_3$$

Tra tutte la forma espressa tramite polinomi di Bernstein è la più ricca di informazione oltre ad essere anche la più stabile per piccole variazioni di t rispetto alla base standard, tuttavia la forma matriciale aiuta ad effettuare una buona interpolazione.

Si vuole che, data una certa quantità di punti, la curva da trovare passi per questi punti. Per determinare univocamente questa curva si lavora con una specifica matrice.

$$\underline{P}(t_j) = \underline{Q}_j \quad \forall j=0, \dots, n \quad k=3$$

Se k=3 allora i punti presenti attraverso i quali la curva deve passare sono 4.

Allora, come detto prima:

$$\underline{P}(t) = \underline{A}_0 + t \underline{A}_1 + t^2 \underline{A}_2 + t^3 \underline{A}_3 \quad \underline{P}(t_0) = \underline{A}_0 + t_0 \underline{A}_1 + t_0^2 \underline{A}_2 + t_0^3 \underline{A}_3 = \underline{Q}_0$$

Per determinare le coordinate del punto  $\underline{Q}_0$  la relazione di cui sopra torna:

$$a_0 + t a_1 + t^2 a_2 + t^3 a_3 = q_0$$

E si eseguono gli stessi calcoli con  $\underline{P}(t_1), \underline{P}(t_2), \underline{P}(t_3)$  fino ad esaurimento si ottiene un sistema di 4 funzioni in diverse incognite detto **matrice di Van Dermonde**. Tale sistema ha una sola soluzione la quale determina la coordinata x di tutti i punti della curva  $\underline{Q}$ . Si eseguono gli stessi calcoli anche per le coordinate y e z. In questa maniera si può studiare la curva interpolata. Tale interpolazione è detta **interpolazione di Lagrange**.

Questa interpolazione ha i suoi **vantaggi**: ovvero che esiste sempre ed è unica oltre al fatto che per calcolarla si necessita di un polinomio di grado inferiore all'1. Gli **svantaggi** di tale approccio però sono che spostando di poco un qualsiasi punto del poligono di controllo la curva risultante cambierà di molto rispetto a quella di partenza.

Quella appena vista è la teoria che si nasconde dietro il calcolo effettivo dell'interpolazione di Lagrange, perchè nella pratica si tratta di un metodo troppo dispendioso. Quella che segue è la formula pratica dell'interpolazione di Lagrange:

$$\underline{L}(t) = \sum_{i=0}^k L_i^k(t) \underline{Q}_i \quad \text{dove} \quad L_i^k(t) = \prod_{j=0, j \neq i}^k \frac{t-t_j}{t_i-t_j} \quad \text{è detto } \underline{\text{interpolante di Lagrange.}}$$

$$L_i(t) = \frac{(t-t_0)(t-t_1)\dots(t-t_k)}{(t_i-t_0)(t_i-t_1)\dots(t_i-t_k)} \quad \underline{L}_i(t_j) = 0 \rightarrow i \neq j; 1 \rightarrow i = j$$

Nel caso in cui  $i=j$  numeratore e denominatore sono la stessa cosa. La soluzione esiste e si dimostra che è anche l'unica possibile.

### 3.4.2 Algoritmo di Aitken

Un metodo alternativo per trovare la funzione interpolante è usare un algoritmo iterativo detto **algoritmo di Aitken**. Si utilizza una sequenza di *interpolazioni lineari* ripetute. La modalità è molto simile a quella di De Casteljaeu. Dati 4 punti casuali del tipo  $\underline{Q}_0, \underline{Q}_1, \underline{Q}_2, \underline{Q}_3$  attraverso i quali si costringe la futura curva interpolata, il primo passo da compiere per l'interpolazione è praticamente identico a De Casteljaeu:

$$\underline{P}_0^1(t) = (1-t)\underline{Q}_0 + t\underline{Q}_1$$

Il cambiamento avviene al secondo passo:

$$\underline{P}_i^r(t) = \left(1 - \frac{t-t_i}{t_{i+r}-t_i}\right) \underline{P}_i^{r-1}(t) + \left(\frac{t-t_i}{t_{i+r}-t_i}\right) \underline{P}_{i+1}^{r-1}(t)$$

Il tutto funziona solo se la nuova curva passa per un numero di punti uguale al numero di punti fissati per la curva di partenza.

Tutto procede bene quando i punti da interpolare sono numerosi come il parametro  $t$ . Si può avere però un numero di parametri maggiore rispetto al numero di punti fissati da interpolare. Si sfrutta allora la matrice **inversa sinistra** della matrice che descrive l'interpolazione. Si ha una matrice  $A$  con  $\det(A) \neq 0$  moltiplicata per il vettore formale della curva, ottenendo così i punti interpolati.

$$A(3,3) \underline{P}(3,1) = \underline{Q}(3,1)$$

Possono sussistere situazioni in cui la matrice  $A$  ha 4 righe a causa dei coefficienti di  $t$  che risultano essere in numero maggiore rispetto ai punti da interpolare, allora:

$$A(s+1,4) \underline{P}(3,1) = \underline{Q}(s+1,1)$$

Ora  $A$  non è più una matrice quadrata con grado maggiore di 3, tuttavia è una matrice di rango massimo che quindi ammette inversa sinistra  $\rightarrow A^+A = I_4$  e la cosa funziona bene per le curve di Bèzier con grado molto elevato e molti punti da interpolare. La soluzione che si ottiene è una soluzione approssimata derivata da un sistema a molteplici incognite.

### 3.4.3 Polinomi interpolanti di Hermite

Esistono dei casi in cui si hanno, oltre ad una serie di punti attraverso i quali far passare una curva, anche delle *informazioni aggiuntive* come, per esempio, il valore delle derivate della funzione interpolante in corrispondenza dei punti da interpolare. In questa maniera la curva è forzata non solo a passare per determinati punti ma anche a comportarsi, in quei punti, in una data maniera indicata dai vettori tangenti. Ovviamente la curva sarà *regolare* in tutti i punti da interpolare. Il metodo più utilizzato per risolvere problemi di questi tipo è l'**interpolazione di Hermite**.

Si suppone di assegnare a due **punti**  $A$  e  $B$  (punti corrispondenti ai punti di inizio e di fine della curva in questione) due **vettori tangenti** alla curva in quei punti, rispettivamente

$\vec{m}_0, \vec{m}_1$ . Si cerca quindi una funzione polinomiale  $\underline{P}(t)$  di grado=3 definita sull'intervallo  $[0,1]$  che interpoli questi dati.

$$P(0)=A \rightarrow \frac{d}{dt} P(0)=\vec{m}_0 \quad P(1)=B \rightarrow \frac{d}{dt} P(1)=\vec{m}_1$$

Si vuole esprimere  $\underline{P}(t)$  come una curva di Bèzier di grado=3, si devono quindi cercare i quattro punti  $\underline{P}_0, \underline{P}_1, \underline{P}_2, \underline{P}_3$  del poligono di controllo della curva. Come detto poc'anzi, per interpolare i punti dati il punto iniziale e finale del poligono di controllo devono coincidere con i punti che devono essere interpolati, per l'appunto A e B. Bisogna tenere quindi conto delle *derivate* ( $\rightarrow$  vettori tangenti):

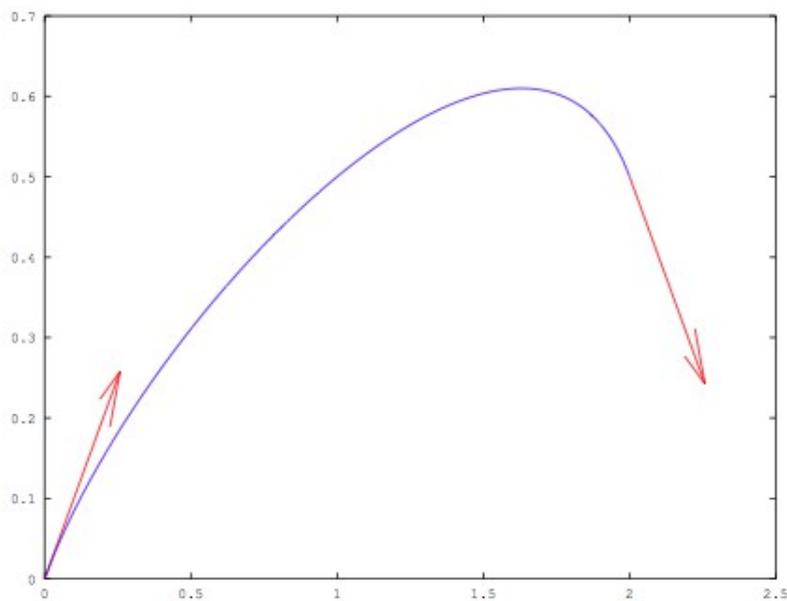
$$\frac{d}{dt} P(0)=\dot{P}(0)=\frac{3!}{(3-1)!} \Delta^1 \underline{P}_0=3(\underline{P}_1-\underline{P}_0) \quad \frac{d}{dt} P(1)=\dot{P}(1)=\frac{3!}{(3-1)!} \Delta^1 \underline{P}_2=3(\underline{P}_3-\underline{P}_2)$$

Allora gli altri due punti del poligono di controllo devono essere tali che:

$$\vec{m}_0=3(\underline{P}_1-\underline{P}_0) \rightarrow \underline{P}_1=\underline{P}_0+\frac{1}{3}\vec{m}_0=A+\frac{1}{3}\vec{m}_0 \quad \vec{m}_1=3(\underline{P}_3-\underline{P}_2) \rightarrow \underline{P}_2=\underline{P}_3-\frac{1}{3}\vec{m}_1=B-\frac{1}{3}\vec{m}_1$$

È quindi possibile dare una forma esplicita alla funzione interpolante dal momento che si tratta di una curva di Bèzier:

$$\begin{aligned} P(t) &= B_0^3(t) \underline{P}_0 + B_1^3(t) \underline{P}_1 + B_2^3(t) \underline{P}_2 + B_3^3(t) \underline{P}_3 \\ P(t) &= B_0 A + B_1 \left( A + \frac{1}{3} \vec{m}_1 \right) + B_2 \left( B - \frac{1}{3} \vec{m}_2 \right) + B_3 B \\ P(t) &= \underbrace{(B_0 + B_1)}_{H_0^3(t)} A + \underbrace{\left( \frac{1}{3} B_1 \right)}_{H_1^3(t)} \vec{m}_1 + \underbrace{\left( \frac{1}{3} B_2 \right)}_{H_2^3(t)} \vec{m}_2 + \underbrace{(B_2 + B_3)}_{H_3^3(t)} B \end{aligned}$$



Ora si può dare una forma canonica alla funzione, scrivendola nella forma:

$$P(t) = H_0^3(t)A + H_1^3(t)\vec{m}_1 + H_2^3(t)\vec{m}_2 + H_3^3(t)B$$

Tali  $H_i^3(t)$  per  $i=0,\dots,3$  definiti poco prima sono detti **polinomi cubici di Hermite**. L'interpolazione di Hermite lavora solo con curve di grado abbastanza basso permettendo però un controllo locale fortissimo, in maniera assai più semplice di Lagrange. Tuttavia la curva trovata in questa maniera risulta essere solo di classe  $C^1$ .

### 3.5 Problemi delle curve di Bèzier

Il disegno di una curva di Bèzier complessa richiede il disegno di un poligono di controllo con molti lati e vertici che, all'aggiunta di un nuovo vertice, aumenta di conseguenza il grado del polinomio. Tutto ciò rappresenta un problema computazionale non indifferente sul computer. Tuttavia se si utilizzano solo curve polinomiali basse si ottengono solamente curve semplici. Inoltre tutta la curva si modifica allo spostamento di un solo vertice del poligono di controllo. Non esiste alcun **controllo locale** perchè ogni punto lavora alla determinazione del poligono. Il controllo pseudo-locale è possibile, tuttavia inutile.

---

## Appunti

*sulle curve di Bèzier*

# Capitolo 4

## Curve Spline

### 4.1 Introduzione<sup>[2]</sup>

Le **curve spline** altro non sono se non incollamenti di *curve polinomiali*. Per questo sono definite come *curve polinomiali a tratti*. Nello specifico si parlerà unicamente di **curve spline di Bèzier**, quindi formate dall'incollamento di diverse curve di Bèzier (le quali costituiscono a tutti gli effetti i *tratti* della curva spline). Il nome di *spline* deriva dalla lamina metallica utilizzata dai fisici per delineare tali curve, le quali si venivano a formare con la deformazione di questa lamina forzata ad incastrarsi tra una serie di chiodi fissati.

Se le curve di Bèzier erano definite su intervalli  $[0, 1]$  all'interno dei quali variava  $t$ , le curve spline sono definite come applicazioni continue su una collezione di intervalli del tipo  $[u_i, u_{i+1}]$  con  $u_0 < \dots < u_L$  in maniera tale che la restrizione della spline ad ogni intervallo  $[u_i, u_{i+1}]$  sia a sua volta una semplice curva polinomiale. Ogni *numero reale*  $u_i$  è detto **nodo** della curva spline.

Ad ogni valore del parametro  $u$  corrisponde un punto  $s(u)$  della curva  $s$ . Si suppone che  $u \in [u_i, u_{i+1}]$  e si introduce il parametro locale  $t$  per l'intervallo  $[u_i, u_{i+1}]$ :

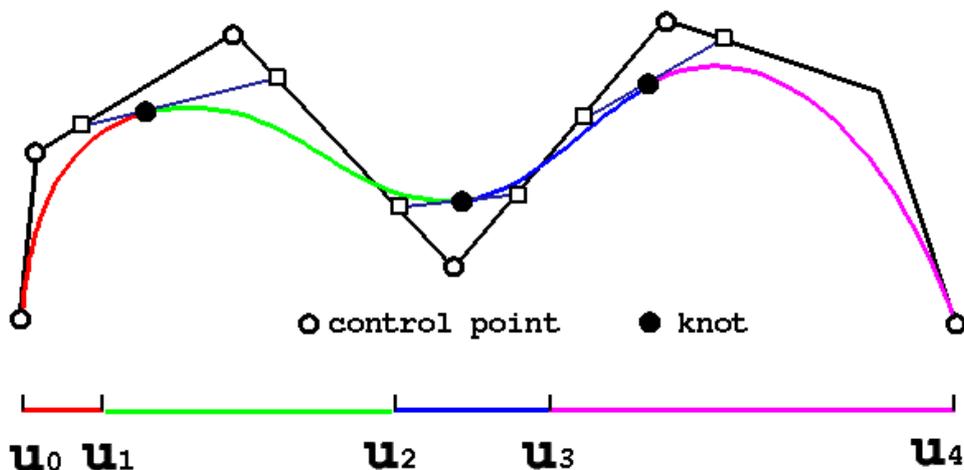
$$t = \frac{u - u_i}{u_{i+1} - u_i} = \frac{u - u_i}{\Delta_i} \quad \text{con } \Delta_i = u_{i+1} - u_i \quad \text{per ogni } i = 0, \dots, L-1$$

$$\underline{P}(u) = \sum_{i=0}^k B_i^k \left( \frac{u - u_i}{u_{i+1} - u_i} \right) \underline{P}_i$$

Tramite il cambio di parametro è possibile indicare l'incollamento delle diverse curve di Bèzier che, tra loro, posseggono tutte lo stesso grado.

Una spline sarà quindi definita tramite il parametro globale  $u$ , invece ogni tratto della spline sarà definito da un parametro locale  $t$ . Si denota inoltre con  $s_i$  l' $i$ -esimo tratto della spline e con  $s(u) = s_i(t)$  i suoi punti.

I punti  $s(u_i) = s_i(0) = s_{i-1}(1)$  sono detti **punti di giunzione**.



## 4.2 Condizioni di incollamento

### 4.2.1 Condizione di incollamento $C^1$

Per avere un incollamento di tipo  $C^1$  dev'esserci prima di tutto un incollamento di tipo  $C^0$ , il quale equivale alla richiesta che il punto finale ed il punto iniziale dei due poligoni di controllo debbano coincidere  $\rightarrow \underline{P}(b)=\underline{Q}(b)$ .

Per quanto riguarda la condizione  $C^1 \rightarrow \dot{\underline{P}}(b)=\dot{\underline{Q}}(b)$  gli unici punti che influenzano la *derivata prima* del punto di giunzione  $\underline{P}_n$  sono i punti  $\underline{P}_{n-1}, \underline{P}_n, \underline{P}_{n+1}$ ; si determina quindi come dev'essere il punto  $\underline{P}_{n+1}$  affinché ci sia un incollamento di classe  $C^1$ . I tre punti devono innanzitutto essere allineati, quindi devono rispettare tra di loro il rapporto semplice che esiste tra i nodi  $u_0, u_1, u_2$ . Il rapporto semplice tra i nodi è dato da:

$$r(u_0, u_1, u_2) = \frac{u_1 - u_0}{u_2 - u_1}$$

Per determinare una sequenza di nodi che soddisfi un determinato problema di interpolazione si deve sempre partire dall'analisi della configurazione dei **punti di De Boor**. Affinché una spline sia di tipo  $C^0$  basta che i punti di giunzione coincidano, qualsiasi sia la sequenza dei nodi. Una spline non sarà mai di tipo  $C^1$  se i punti consecutivi ai punti di giunzione non sono allineati, qualsiasi sia la sequenza dei nodi.

In ogni caso, qualsiasi sia la sequenza di nodi scelti, il *supporto* della spline non cambia, perché, essendo formato dall'incollamento di curve di Bèzier, il supporto è univocamente determinato dai punti di De Boor.

### 4.2.2 Condizione di incollamento $C^2$

Per un incollamento di tipo  $C^2$  entrano in gioco anche le *derivate seconde*:  $\ddot{\underline{P}}(b)=\ddot{\underline{Q}}(b)$ . Ci dovranno quindi essere delle condizioni sui punti  $\underline{P}_{n-2}, \underline{P}_{n+2}$  senza dimenticare le condizioni già ricavate per i punti  $\underline{P}_{n-1}, \underline{P}_n, \underline{P}_{n+1}$  per avere un incollamento di tipo  $C^0$  e  $C^1$ . Si vuole quindi dimostrare che per avere un incollamento di classe  $C^2$  devono valere le seguenti condizioni:

$$\underline{P}_{n-1} = (1-t_1)\underline{P}_{n-2} + t_1 D \quad \underline{P}_{n+1} = (1-t_1)D + t_1 \underline{P}_{n+2} \quad \text{dove } t_1 = \frac{u_1 - u_0}{u_2 - u_1}$$

e  $D$  è il punto di intersezione tra le rette passanti per  $\underline{P}_{n-2}, \underline{P}_{n-1}$  e  $\underline{P}_{n+1}, \underline{P}_{n+2}$ . I punti  $D$  sono detti **punti di De Boor**. Per definire le curve spline servono la disposizione dei nodi e la posizione dei punti di De Boor. Si può osservare che oltre alla richiesta dell'esistenza dei punti  $D$  di intersezione tra le rette passanti per  $\underline{P}_{n-2}, \underline{P}_{n-1}$  e  $\underline{P}_{n+1}, \underline{P}_{n+2}$  si richiede anche che siano sempre e comunque mantenuti tutti i **rapporti semplici**, ovvero che valgano  $r(u_0, u_1, u_2) = r(\underline{P}_{n-2}, \underline{P}_{n-1}, D) = r(D, \underline{P}_{n+1}, \underline{P}_{n+2})$ . Inoltre si osserva che se non esiste un punto d'intersezione  $D$  tra le rette individuate rispettivamente dai punti  $\underline{P}_{n-2}, \underline{P}_{n-1}$  e  $\underline{P}_{n+1}, \underline{P}_{n+2}$  salta automaticamente la condizione di incollamento  $C^2$  (per esempio nel caso di rette parallele nel piano o di rette parallele o sghembe nello spazio). Le curve spline generalmente hanno grado=2 nel piano e grado=3 nello spazio, con condizioni di incollamento di classe  $C^1$ , al massimo di classe  $C^2$ .

### 4.2.3 Continuità geometrica

Si presenta un altro tipo di incollamento, meno rigido dell'incollamento di tipo  $C^r$ , dove entrano in gioco *caratteristiche geometriche*, e proprio per questo prende il nome di **continuità geometrica**.

Si dice che due tratti di spline  $s_{i-1}$  ed  $s_i$  si raccordano con **continuità geometrica del tipo  $G^r$**  nel punto  $B_i := s_{i-1}(u_i) = s_i(u_i)$  se esiste una nuova parametrizzazione di  $s_i$  che conserva l'orientazione, tale che dopo il cambio di parametro si abbia un incollamento di tipo  $C^r$  in  $B_i$ .

**Incollamento di tipo  $G^1$ .** Si impone che la retta tangente vari con continuità. I vettori tangenti in arrivo ed in partenza differiscono solo per il modulo.

**Incollamento di tipo  $G^2$ .** La curvatura rimane invariata.

## 4.3 Spline di Bèzier quadratica di tipo $C^1$

Si considera ora il caso di una *spline quadratica di tipo  $C^1$*   $s(u)$  definita su  $L$  intervalli tali che  $u_0 \leq \dots \leq u_L$ . Si hanno quindi  $L$  curve di Bèzier tutte di grado=2 da incollare tra loro e si devono trovare i punti  $\underline{P}_0, \underline{P}_1, \underline{P}_2, \dots, \underline{P}_{2L-2}, \underline{P}_{2L-1}, \underline{P}_{2L}$  dove i punti  $\underline{P}_{2i}$ , per  $i \neq 0$  e  $i \neq L$ , sono i **punti di giunzione** ed i punti  $\underline{P}_{2i+1}$  uniti a  $\underline{P}_0$  e  $\underline{P}_L$  sono i **punti di De Boor**.

Per la condizione di incollamento  $C^1$  i punti di giunzione devono essere tali che:

$$\underline{P}_{2i} = \frac{\Delta_i}{\Delta_i + \Delta_{i-1}} \underline{P}_{2i-1} + \frac{\Delta_{i-1}}{\Delta_i + \Delta_{i-1}} \underline{P}_{2i+1} \quad \text{per } i=1, \dots, L-1$$

con  $\Delta_i = u_{i+1} - u_i$  insieme di nodi variabili e disgiunti.

Per come si è definita la sequenza di punti della spline, e quindi con la richiesta di mantenere i *rapporti semplici*, la spline non dipende solo dai punti di De Boor ma anche dalla **sequenza dei nodi**. Infatti esistono spline che hanno gli stessi punti di giunzione e che sono definiti sullo stesso intervallo, ma avendo una diversa distribuzione dei nodi generano curve diverse.

Un'importante caratteristica delle curve spline che le distingue dalle curve di Bèzier è che esiste un forte **controllo locale**. Se si considera una spline quadratica di classe  $C^1$  e si cambia uno dei punti di De Boor, tale cambiamento influenzerà al massimo 3 tratti della spline (ma generalmente solo 2, ovvero le due curve di Bèzier incollare in quel punto) mentre gli altri tratti, quindi tutte le altre curve, rimangono invariati. Una proprietà analoga si estende ad ogni tipo di spline.

Si possono inoltre spostare i nodi come cursori lasciando immutato l'involucro convesso; si tratta di una capacità specifica delle curve spline, tipica di quando il poligono di controllo è chiuso (per esempio, una curva spline completamente inscritta in un triangolo). Questo significa che le curve spline possono esistere in un intervallo aperto come in un intervallo chiuso, allora in questo caso i punti iniziale  $\underline{P}_0$  e finale  $\underline{P}_{2L}$  coincidono.

## 4.4 Spline di Bèzier cubica di tipo $C^2$

Si considera ora una *spline cubica di tipo  $C^2$*   $s(u)$  definita sempre su  $L$  intervalli tali che  $u_0 \leq \dots \leq u_L$ . Quindi, come prima, ci sono  $L$  curve di Bèzier da incollare tra loro ma ora

sono di grado=3.

In questo caso si devono definire i punti  $\underline{P}_0, \underline{P}_1, \underline{P}_2, \underline{P}_3, \dots, \underline{P}_{2L-3}, \underline{P}_{2L-2}, \underline{P}_{2L-1}, \underline{P}_{2L}$  dove i punti  $\underline{P}_{3i}$  sono i **punti di giunzione**. In questo caso si definiscono **punti di De Boor** i primi due, gli ultimi due ed i punti aggiuntivi  $D_i$  introdotti di seguito.

La condizione di incollamento  $C^1$  per i punti di giunzione dev'essere tale che:

$$\underline{P}_{3i} = \frac{\Delta_i}{\Delta_i + \Delta_{i-1}} \underline{P}_{3i-1} + \frac{\Delta_{i-1}}{\Delta_i + \Delta_{i-1}} \underline{P}_{3i+1} \quad \text{per } i=0, \dots, L-1$$

dove  $\Delta_i$  equivale alla differenza tra il successivo di un punto e sé stesso (ovviamente bisogna conoscerli entrambi).

Per rispettare la condizione di incollamento  $C^2$  si ha bisogno di definire i punti aggiuntivi  $D_i$  con  $i=2, \dots, L-2$  in modo tale che rispettino le seguenti uguaglianze:

$$\underline{P}_{3i-2} = \frac{\Delta_{i-1} + \Delta_i}{\Delta_{i-2} + \Delta_{i-1} + \Delta_i} D_{i-1} + \frac{\Delta_{i-2}}{\Delta_{i-2} + \Delta_{i-1} + \Delta_i} D_i \quad \underline{P}_{3i-1} = \frac{\Delta_i}{\Delta_{i-2} + \Delta_{i-1} + \Delta_i} D_{i-1} + \frac{\Delta_{i-2} + \Delta_{i-1}}{\Delta_{i-2} + \Delta_{i-1} + \Delta_i} D_i$$

I punti di De Boor dipendono direttamente dai punti di Bèzier.

I vari  $\Delta$  indicano che la condizione di incollamento  $C^2$  viene soddisfatta. Capita quindi che allo spostamento dei nodi la curva si muova ma senza mai uscire dal poligono venutosi a creare tramite i punti di De Boor.

Come per le spline quadratiche anche per quelle cubiche vale la proprietà del controllo locale anche se in misura minore rispetto alle spline quadratiche. Infatti se si cambia un punto di De Boor  $D_i$  si modificano fino a 4 tratti della spline, contro i soli 3 delle spline quadratiche.

## 4.5 Spline Base (B-Spline)

Esiste un formalismo per descrivere formalmente una curva spline in maniera affine a come si esprimono le curve di Bèzier; in questa circostanza B non indica un polinomio di Bernstein ma una **spline base** o **B-Spline** (poiché *base* dello spazio dei polinomi con grado  $< K$ , polinomi calcolati con le formule ricorsive di De Boor).

Le **B-Spline cubiche** approssimano una serie di  $m+1$  punti di controllo  $\underline{P}_0, \underline{P}_1, \dots, \underline{P}_m$  con  $m \geq 3$ . I punti di controllo definiscono  $m-2$  *segmenti cubici adiacenti* di curva. Per esempio, se esistono 4 punti di controllo, la B-Spline sarà formata da una sola curva di Bèzier: in questo caso non ci sarà differenza tra la B-Spline e la curva di Bèzier relative allo stesso poligono di controllo. Si ricorda che il grado della curva è indipendente dal numero di punti di controllo. Le B-Spline si dicono *uniformi* se i differenti segmenti di curva corrispondono agli stessi intervalli di spazio del parametro<sup>[3]</sup>.

$$\underline{P}(t) = \sum_{i=0}^m B_{i,k}(t) \underline{P}_i$$

con  $\underline{P}_i$  equivalente a  $m+1$  punti di controllo e  $k$  = ordine o grado del polinomio +1. Il polinomio  $B_{i,k}(t)$  è definito come:

$$B_{i,k}(t) = \frac{t - t_i}{t_{i+k-1} - t_i} B_{i,k-1}(t) + \frac{t_{i+k} - t}{t_{i+k} - t_{i-1}} B_{i+1,k-1}(t)$$

$$B_{i,1}(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } t_i \leq t \leq t_{i+1} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Dato il polinomio di controllo, la curva di Bèzier è definita come combinazione lineare di polinomi di Bernstein definiti sul segmento e le curve spline (di curve di Bèzier) sono funzioni definite a tratti da un nodo al successivo che si raccordano con continuità di ordine opportuno. Le funzioni B-Spline invece sono funzioni definite globalmente su tutta la sequenza dei nodi ma non polinomi che sono non nulli solo su sottoinsiemi della sequenza di nodi, sempre con la condizione che siano spline, cioè che si raccordino con opportuno ordine di continuità<sup>[4]</sup>.

Le B-Spline dipendono dal numero di nodi e dalla loro natura, con  $m=n+k$  ed i nodi sono in numero pari a  $m+1$  con grado  $=k \rightarrow t \in [t_k, t_{m-k}]$ . I punti che contano per l'incollamento delle curve si trovano tra  $t_k$  e  $t_{m-k}$  mentre tutti gli altri servono per la costruzione della spline e per la definizione delle funzioni  $B_{i,k}(t)$ .

Nel caso di  $B_{i,1}(t)$  è possibile far collassare alcuni dei nodi tra loro (nell'insieme di nodi tra  $t_k$  e  $t_{m-k}$  ma solo a gruppi di  $k$ ). La cosa funziona solo per nodi consecutivi.

La scelta dei punti rispetto ad un certo intervallo è molto importante.

Quando si lavora con un **poligono di De Boor** (ovvero formato nei vertici da punti di De Boor), se si vuole che la curva parta ed arrivi nei punti iniziali e finali del poligono di controllo si possono far collassare alcuni dei punti interni.

Per esempio,  $\underline{P}(t_4) = B_{2,3}(t_3)\underline{P}_2 + B_{3,3}(t_4)\underline{P}_3$  indica che la curva tocca il poligono di controllo tra i punti  $\underline{P}_2$  e  $\underline{P}_3$ . Quando collassano tra loro i punti centrali succede che  $\underline{P}(t_4) = \underline{P}_3$ .

In questa maniera la curva spline passa per un vertice del poligono di controllo ed è evidente che risulta dall'unione di due curve (nel caso della spline, di due sottocurve) di Bèzier distinte.

È possibile creare delle curve spline con dei punti angolosi in corrispondenza dei punti di De Boor; queste sono dette **curve molto non regolari**.

### 4.5.1 Algoritmo di De Boor – Cox

L'**algoritmo di De Boor-Cox** è una generalizzazione dell'algoritmo di De Casteljau (oltre ad essere un'*ottimizzazione per computer* dell'algoritmo di De Boor); si tratta di un modo veloce e numericamente stabile per trovare un punto in una B-Spline dato un nodo  $u$  appartenente al dominio  $u \in [0,1]$ . Meglio, dato un valore  $u$  è possibile recuperare un valore  $C(u)$  corrispondente al valore della spline nel punto  $u$ .<sup>[5]</sup>

Sia dunque  $U = \{u_0, \dots, u_m\}$  una successione non decrescente di numeri reali;  $U$  è il vettore dei nodi della curva spline. La  $i$ -esima base B-Spline di grado  $k$  denotata da  $B_{i,k}(u)$  è definita come:

$$B_{i,k}(t) = \frac{t-t_i}{t_{i+k-1}-t_i} B_{i,k-1}(t) + \frac{t_{i+k}-t}{t_{i+k}-t_{i-1}} B_{i+1,k-1}(t)$$

L'algoritmo calcola iterativamente i polinomi  $B_{i,k}(t)$  determinando così il preciso punto corrispondente a  $u$  della B-Spline non razionale in  $E^4$  determinata dai punti del poligono di De Boor in coordinate omogenee  $\{w_i \underline{P}_i, w_i\}$  e proietta il punto così ottenuto in  $E^3$ .<sup>[6]</sup>

Il passaggio da un livello all'altro dell'algoritmo è dato da:

$$\underline{P}_{i-1}^{q+1}(t) = w_{i,k-q}(t) \underline{P}_i^q(t) + (1-w_{i,k-q}(t)) \underline{P}_{i-1}^q(t)$$

Esistono algoritmi che inseriscono un punto in più per creare un punto angoloso.

Aggiungere un nodo non è indolore e per rispettare la proprietà di  $m=n+k$  esistono degli algoritmi appositi abbastanza complessi.

---

## **Appunti**

*sulle curve spline*

### 5.1 Introduzione<sup>[8]</sup>

Una *superficie* è un luogo dei punti dello spazio le cui coordinate soddisfano un'equazione nella forma  $F(x,y,z)=0$ , detta **equazione cartesiana della superficie**. Se l'equazione è un polinomio si parla di **superficie algebrica**: in questo caso il grado dell'equazione indica il numero di intersezioni che la generica retta dello spazio ha con la superficie e viene più propriamente chiamato *ordine della superficie*.<sup>[7]</sup>

Si parlerà di **fogli semplici di superficie** i quali, composti tra loro, danno luogo ad una *superficie normale*. Come accaduto per le curve, l'oggetto dello studio sarà ancora una classe di equivalenza di applicazioni del tipo:

$$\underline{P}: A \rightarrow \mathbb{R}^3 \leftrightarrow \mathbb{E}^3$$

dove  $A$  è il prodotto cartesiano di due intervalli aperti che risulti essere in un insieme aperto e che sia quindi un insieme del piano privo di punti di bordo. Questo insieme di definizione è contenuto in un piano  $\mathbb{R}^2$  e per convenzione le coordinate del generico punto di questo piano si indicano con le due variabili  $(u, v) \in \mathbb{R}^2 \supseteq A$ . Si ha allora un'applicazione da un sottoinsieme del piano  $\mathbb{R}^2$  verso  $\mathbb{R}^3$  definita da una tripletta di funzioni del tipo:

$$\begin{aligned}x &= x(u, v) \\y &= y(u, v) \\z &= z(u, v)\end{aligned}$$

Si richiede che le funzioni siano tali che  $\underline{P} \in C^1(A)$  e si suppone che le applicazioni siano tanto regolari quanto necessario. È inoltre opportuno che l'applicazione  $\underline{P}$  sia *iniettiva* così che l'immagine di tale applicazione non si autoinserisca mai (quindi che un foglio si pieghi e si tagli da solo, tuttavia l'iniettività non garantisce che non ci siano sovrapposizioni).

Per le superfici si parla di **poliedro di controllo**.

#### 5.1.1 Condizione di regolarità

Come si richiedeva una certa condizione alle curve per essere definite **regolari**, si fa la medesima cosa con le superfici. Dette *derivate parziali in  $u$  e  $v$*  i vettori derivati come

$$\frac{\delta \underline{P}}{\delta u} = \underline{P}_u \quad \frac{\delta \underline{P}}{\delta v} = \underline{P}_v$$

la **condizione di regolarità** è data da  $\underline{P}_u \wedge \underline{P}_v \neq 0 \quad \forall (u, v) \in A$ .

Un'applicazione  $\underline{P}$  così definita è detta **foglio semplice**. Nel caso delle curve la condizione di regolarità diceva che in ogni punto del supporto della curva esiste una retta tangente in quel punto alla curva stessa; nel caso delle superfici la condizione di regolarità dice che in ogni punto del supporto di un foglio semplice è definito in maniera univoca un **piano tangente** al foglio in quel determinato punto.

*Esempio.* Il più intuitivo caso di foglio semplice è dato dalla definizione di piano.

$$\begin{aligned} x &= 3 - 2u + v \\ y &= 5 - u + 2v \\ z &= -1 + u + v \end{aligned} \quad \frac{\delta \underline{P}}{\delta u} = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \frac{\delta \underline{P}}{\delta v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

dove  $\underline{P} - \underline{P}_0 = u\underline{a} + v\underline{b}$  con  $\underline{a}$  e  $\underline{b}$  linearmente indipendenti.

### 5.1.2 Condizione di equivalenza

Si dice che i fogli semplici  $\underline{P}$  e  $\underline{Q}$  sono tra loro **equivalenti** se esiste un'applicazione biunivoca, bicontinua e bidifferenziabile

$$\varphi = \begin{matrix} u' = u(u', v') \\ v' = v(u', v') \end{matrix} \text{ tale che } \underline{Q}(u', v') = \underline{P}(u(u', v'), v(u', v'))$$

I fogli semplici possono quindi essere visti come delle particolareggiate rappresentazioni parametriche locali di sottoinsiemi di punti di  $\mathbb{R}^3$  più generali: questi insiemi di punti in  $E^3$  sarebbero quelli che dovrebbero essere chiamati **superfici**.

### 5.1.3 Il piano tangente

Il **piano tangente** nel punto  $P$  è l'unico piano di  $E^3$  che passa per  $P$  ed è perpendicolare al versore normale del foglio semplice in quel punto. In maniera del tutto equivalente, il piano tangente è lo spazio lineare affine

$$\left( \underbrace{\underline{P}(u, v)}_{\underline{P}_0}, \left\langle \underbrace{P_u(u, v)}_a, \underbrace{P_v(u, v)}_b \right\rangle \right)$$

Tale piano è detto tangente perchè è esattamente il piano che raccoglie tutte le tangenti in  $P$  a tutte le curve regolari tracciate sul foglio semplice passanti per il punto  $P$ . Una curva è detta *tracciata su un foglio semplice* se si tratta di una curva regolare definita all'interno dell'insieme di definizione  $A$  della funzione  $\underline{P}$ , quindi rappresentata da una coppia di funzioni del tipo

$$\begin{aligned} u &= u(t) \\ v &= v(t) \end{aligned} \text{ con } t \in (a, b) \subseteq \mathbb{R}.$$

Preso un certo valore  $\bar{t} \in (a, b)$  cui corrispondono  $\bar{u} = u(\bar{t}), \bar{v} = v(\bar{t})$ , si va a considerare la curva definita in  $E^3$  che si ottiene componendo  $\underline{P}$  con quest'applicazione: si avrà

$$\underline{P} = \underline{P}(t) = \underline{P}(u(t), v(t)).$$

Se la curva in questione è regolare, anche la nuova curva è regolare, per cui possiede una ben definita retta tangente in ogni suo punto, che nel caso in oggetto è la retta che passa per il punto  $\underline{P}(\bar{u}, \bar{v})$  ed ha come vettore direzione:

$$\frac{d\underline{P}}{dt} \Big|_{\bar{t}} = \frac{d\underline{P}}{du} \Big|_{(\bar{u}, \bar{v})} \frac{d\underline{u}}{dt} \Big|_{\bar{t}} + \frac{d\underline{P}}{dv} \Big|_{(\bar{u}, \bar{v})} \frac{d\underline{v}}{dt} \Big|_{\bar{t}},$$

ovvero

$$\dot{\underline{P}}(\bar{t}) = \alpha \underline{P}_u(\bar{u}, \bar{v}) + \beta \underline{P}_v(\bar{u}, \bar{v}), \quad (\alpha, \beta) \neq (0, 0).$$

Quindi il vettore tangente è combinazione lineare di questi due vettori derivati che sono esattamente quelli che, come da definizione, generano il piano tangente.

Si ha quindi assegnato ad ogni vettore del piano tangente una coppia di coordinate del tipo  $\{\alpha, \beta\}$ . In futuro si andrà spesso a considerare il piano tangente di un foglio semplice di superficie  $S$  ed a prendere dei vettori come  $\underline{a}$ ,  $\underline{b}$ ,  $\underline{c}$  appartenenti a questo spazio tangente, sottintendendo in realtà che questi vettori stanno nello spazio direttore del piano tangente. Quando invece si parlerà di *direzione uscente* da un punto di un foglio semplice si intenderà semplicemente uno dei suddetti vettori diversi da  $\underline{0}$ .

Tale *sistema di riferimento* è così importante che è addirittura il **sistema di riferimento mobile** dei fogli semplici: nel caso dei fogli semplici il sistema di riferimento mobile si definisce in maniera molto più semplice rispetto al caso delle curve ed è dato semplicemente da  $\underline{P}_u, \underline{P}_v, \underline{N}$ . E' così facile definire un sistema di riferimento come questo perchè non è richiesto che sia ortonormale.

## 5.2 Fogli semplici di rotazione

Nel piano  $xy$  si sceglie una curva semplice

$$\begin{aligned} x &= f(u) > 0 & \text{con } u &\in (a, b) \\ z &= h(v) \end{aligned}$$

che sta tutta nel semispazio  $x > 0$ . Tale curva viene fatta ruotare attorno all'asse  $z$  e si considerano tutte le circonferenze che vengono così a descriversi, il cui raggio è esattamente  $f(u)$ . Il foglio semplice che viene generato ha la seguente equazione standard:

$$\begin{aligned} x &= f(u) \cos v \\ y &= f(u) \sin v & \text{con } v &\in (0, 2\pi) \\ z &= h(u) & u &\in (a, b) \end{aligned}$$

Si tratta di un caso particolare di *foglio semplice* detto **foglio semplice di rotazione**. Si può anche far ruotare una curva attorno ad un asse per individuare un foglio semplice, l'importante è che la curva, nella sua rotazione, non torni mai su sé stessa.

Si tratta davvero di un foglio semplice perchè:

$$\underline{P}_u \rightarrow \begin{bmatrix} \dot{f}(u) \cos v \\ \dot{f}(u) \sin v \\ \dot{h}(u) \end{bmatrix} \quad \underline{P}_v \rightarrow \begin{bmatrix} -\dot{f}(u) \sin v \\ \dot{f}(u) \cos v \\ 0 \end{bmatrix}$$

Se  $f()$  ed  $h()$  sono funzioni continue lo sono anche  $\underline{P}_u$  e  $\underline{P}_v$ . Si può verificare effettuando qualche conto:

$$\begin{bmatrix} \dot{f}(\cdot) \cos v & \dot{f}(\cdot) \operatorname{sen} v & \dot{h}(\cdot) \\ -\dot{f}(\cdot) \operatorname{sen} v & \dot{f}(\cdot) \cos v & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} -\dot{h}(\cdot) f(\cdot) \cos v \\ -\dot{h}(\cdot) f(\cdot) \operatorname{sen} v \\ \dot{f}(\cdot) f(\cdot) \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} -\dot{h}(\cdot) \cos v \\ -\dot{h}(\cdot) \operatorname{sen} v \\ \dot{f}(\cdot) \end{bmatrix}$$

dove la condizione  $\dot{f}(\cdot)=0=\dot{h}(\cdot)$  non deve mai verificarsi.

## 5.3 Superfici rigate

Un'altra classe particolarmente ampia di *fogli semplici* è quella dei **fogli semplici rigati**. Anche qui si parte da una curva che però in questo caso è genuinamente spaziale, parametrizzata in un intervallo aperto  $\rightarrow \underline{R}=\underline{R}(\mathbf{u})$ . Per ogni punto del supporto di questa curva si individuano quindi una *direzione* ed un *verso* tramite il relativo versore  $\underline{L}(\mathbf{u})$  in quel preciso punto (ottenendo così una retta per ogni punto della curva). Dopodichè si considera un'applicazione del tipo:

$$\underline{P}(u, v)=\underline{R}(u)+v\underline{L}(u) \quad \text{con } v \in \mathbb{R}$$

Questo significa considerare, per ciascun punto della curva  $\underline{R}(u)$ , tutta la retta passante per il punto  $\underline{R}(u)$  che ha come direzione quella individuata dal versore  $\underline{L}(u)$ . Le varie rette che compongono questo foglio semplice si chiamano **generatrici** e la curva di partenza si chiama **direttrice** del foglio semplice. In questa maniera vengono individuati tutti i fogli rigati.

Un sottoinsieme dei punti di  $E^3$  si dice *rigato* se per ogni suo punto passa almeno una retta interamente contenuta nel luogo stesso. È chiaro che in questo modo si vengono a creare dei fogli rigati ma non è detto che l'applicazione così generata sia automaticamente un foglio semplice. Innanzitutto perchè l'applicazione potrebbe non essere iniettiva, ma anche perchè bisogna garantire che i due vettori derivati siano indipendenti. Poichè si ha:

$$\underline{P}_u = \dot{\underline{R}}(u) + v \dot{\underline{L}}(u) \quad \underline{P}_v = \underline{L}(u)$$

può capitare  $\underline{P}_u \wedge \underline{P}_v = \dot{\underline{R}}(u) \wedge \dot{\underline{L}}(u) + v \dot{\underline{L}}(u) \wedge \underline{L}(u) = \underline{0}$ .

### 5.3.1 Cilindro

Si chiama **cilindro** un foglio semplice rigato in cui  $\underline{L}(u)$  è costante. Può capitare che si verifichi la *condizione di non regolarità*  $\underline{P}_u \wedge \underline{P}_v = \dot{\underline{R}}(u) \wedge \underline{L}(u) = \underline{0}$  che accade quando (e se) il vettore tangente alla curva è coincidente come direzione con il vettore scelto. La curva che forma la sezione circolare del cilindro è detta *direttrice*, mentre le "pareti verticali" del cilindro sono costituite dalle rette *generatrici*.

### 5.3.2 Cono

Si chiama **cono** un foglio semplice rigato in cui  $\underline{R}(u)$  è costante. Questo significa che la curva direttrice è collassata in un unico punto fisso. Anche in questo caso la condizione affinché l'applicazione non dia luogo ad un foglio semplice è data da:

$$\underline{P}_u \wedge \underline{P}_v = v \dot{\underline{L}}(u) \wedge \underline{L}(u) = \underline{0}$$

Siccome  $\underline{L}(u)$  è un versore,  $\dot{\underline{L}}$  gli è sempre perpendicolare, quindi non può mai verificarsi

la condizione appena espressa (a meno di  $v = 0$ , il ch  porta nel vertice del cono). Questo significa che se buttiamo via il vertice del cono e  $\underline{P}$    iniettiva, allora si ottiene un foglio semplice.

### 5.3.3 Fogli rigati tangenti ad una curva

Un altro caso particolare   quello dei **fogli rigati tangenti ad una curva**. Si sceglie una curva  $R(u)$  tramite parametro naturale. In questa maniera  $\underline{\dot{R}}(u)$    un versore, si pu  dunque scegliere  $\underline{L}(u) = \underline{\dot{R}}(u)$ . Dato

$$\underline{P}_u \wedge \underline{P}_v = v \underline{\dot{L}}(u) \wedge \underline{L}(u) = 0$$

esattamente come prima il vettore   nullo solo se  $v=0$ , quindi in pratica solo se si buttano via i punti corrispondenti a tale valore e  $\underline{P}$    iniettiva si ottiene un foglio semplice.

Questi tipi di fogli semplici rigati (a cui si aggiunge anche il *piano* per una questione di completezza) sono una particolare famiglia di fogli semplici detti con precisione **fogli semplici sviluppabili**. Il nome   dovuto al fatto che ciascuno di questi fogli pu  essere fatto rotolare senza strisciare lungo un piano, ovvero esiste una corrispondenza biunivoca tra i punti di una piccola porzione del piano ed i punti di una piccola porzione di questi fogli semplici tale che quest'ultima possa essere fatta rotolare senza strisciare sul piano. Nei fogli semplici sviluppabili il piano tangente lungo una generatrice rimane sempre lo stesso.

## 5.4 Prima forma fondamentale

Si vuole indagare se   possibile *calcolare la distanza tra due punti A e B* presi sul supporto di un qualsiasi foglio semplice. Per **distanza tra due punti A e B** sul foglio semplice s'intende l'estremo inferiore<sup>13</sup> delle lunghezze di tutti gli archi di curva tracciati sul foglio semplice che partono da A ed arrivano in B. Tali curve sono da ricercarsi tra le cosiddette curve geodetiche. Ma come calcolare la lunghezza di un'arco di curva tracciata sul foglio? Le curve sui fogli semplici sono curve nella forma  $\underline{P}(u(t), v(t)) = \underline{P}(t), t \in (a, b)$  per cui ci saranno nell'insieme  $(a, b)$  due valori  $t_1, t_2$  corrispondenti ai punti A e B. Allora la lunghezza dell'arco di curva   data proprio dalla formula gi  vista per il calcolo della lunghezza di un arco di curva qualsiasi. Tuttavia il calcolo della lunghezza effettuato in questa maniera fa perdere di vista il fatto che la curva giace su un foglio semplice. Ha senso sviscerare un poco com'  fatta la norma di  $\underline{\dot{P}}$  cos  che si possa calcolare la norma, anzich  con le coordinate del vettore  $\underline{\dot{P}}$  nello spazio  $E^3$ , con le coordinate del vettore nei piani tangenti nei vari punti del supporto della curva. Calcolando la norma in questa maniera il prodotto scalare risultante, su ciascuno degli spazi direttori dei vari piani tangenti, non sar  quello usuale del piano bens  un prodotto scalare regolato da particolari coefficienti i quali danno luogo a **G matrice della prima forma fondamentale** dei fogli semplici.

$$G = \begin{bmatrix} g_{11}(u, v) & g_{12}(u, v) \\ g_{12}(u, v) & g_{22}(u, v) \end{bmatrix} \quad \text{dove} \quad \begin{aligned} g_{11}(u, v) &= \underline{P}_u \times \underline{P}_u \\ g_{12}(u, v) &= \underline{P}_u \times \underline{P}_v \\ g_{22}(u, v) &= \underline{P}_v \times \underline{P}_v \end{aligned}$$

<sup>13</sup> **Estremo inferiore.** L'estremo inferiore di un insieme E   definito come il pi  grande elemento dei minoranti di E (dove un **minorante** di un insieme E si definisce come un elemento  $y$  appartenente ad E tale che per ogni  $x$  appartenente ad E si ha che  $x$    maggiore o uguale ad  $y$ ). Pu  appartenere ad E oppure no.

Questa matrice simmetrica definisce un'applicazione bilineare simmetrica definita per coppie di vettori che stanno sul piano tangente del generico punto del foglio semplice. Si ha dunque  $\|\dot{P}\| = \sqrt{g_{11}\dot{u}^2 + 2g_{12}\dot{u}\dot{v} + g_{22}\dot{v}^2}$  che è l'espressione che permette di calcolare la lunghezza dell'arco della curva giacente sul foglio semplice.

**Interpretazione quadratica di  $G^{14}$ .** Si vanno a considerare le forme quadratiche sullo spazio direttore  $V$  del piano tangente in un punto  $P$  ad un foglio semplice. Si sa che il piano tangente è individuato da una coppia del genere

$$Tp(S) = (P(u, v), \underbrace{\langle P_u(u, v), P_v(u, v) \rangle}_V)$$

si è visto anche che prendendo un vettore  $\underline{a} \in V$  questo avrà una coppia di coordinate

$$\underline{a} = \alpha \underline{P}_u + \beta \underline{P}_v \quad \text{con} \quad \underline{a} \rightarrow \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}$$

Allora la forma quadratica che è sensato prendere in considerazione è la cosiddetta **prima forma fondamentale I**, associata alla matrice  $G$  (in leggera varianza) di cui sopra. La prima forma fondamentale è detta a tutti gli effetti **forma metrica**. Se si vuole valutare l'applicazione bilineare associata alla matrice  $G$  su una qualunque coppia di vettori  $\underline{a}, \underline{b} \in Tp(S)$  si ha che

$$\underline{a} \rightarrow \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} \quad \underline{b} \rightarrow \begin{bmatrix} \gamma \\ \delta \end{bmatrix} \quad I(\underline{a}, \underline{b}) = [\alpha \beta] G \begin{bmatrix} \gamma \\ \delta \end{bmatrix}$$

Questa è l'applicazione bilineare da cui proviene la prima forma fondamentale. In realtà la prima forma fondamentale è definita così per ogni vettore di  $V$ .

Proprio perchè è una forma metrica, questa ha come significato  $\|\underline{a}\|^2$ . La matrice  $G$  è espressa in questa maniera:

$$G(u, v) = \begin{bmatrix} g_{11}(u, v) & g_{12}(u, v) \\ g_{21}(u, v) & g_{22}(u, v) \end{bmatrix} \quad \begin{array}{ll} g_{11}(u, v) = \underline{P}_u \times \underline{P}_u & g_{12}(u, v) = \underline{P}_u \times \underline{P}_v \\ g_{21}(u, v) = \underline{P}_v \times \underline{P}_u & g_{22}(u, v) = \underline{P}_v \times \underline{P}_v \end{array}$$

Si tratta della **matrice di Gram** relativa ai due vettori  $\underline{P}_u, \underline{P}_v$  ovvero la matrice ottenuta facendo ordinatamente tutti i possibili prodotti scalari dei vettori della base.

La matrice  $G$  può essere sfruttata per il calcolo delle lunghezze e degli angoli tra vettori, ma anche per il calcolo di aree. Questa forma fondamentale si occupa di tutti gli aspetti metrici dei fogli semplici.

Esistono delle *isometrie locali* (dove per isometria s'intende la trasformazione di un foglio semplice in un altro completamente diverso) che conservano le proprietà della matrice  $G$ . Se tra gli insiemi di definizione dei due fogli semplici esiste un'applicazione  $\varphi$  biunivoca, bicontinua e bidifferenziabile e tra le due matrici  $G$  che rappresentano le prime forme fondamentali dei due fogli nei punti corrispondenti tramite la  $\varphi$  sussiste una certa relazione, allora si dice che i due fogli sono **isometrici**. L'isometria è un'applicazione biunivoca tra i supporti dei due fogli semplici tale che nei punti corrispondenti tutte le caratteristiche metriche dei vettori dello spazio tangente sono conservate (l'isometria può essere anche solo locale).

La definizione di isometria tira in ballo la matrice  $G$ :

14 **Forma quadratica.** Applicazione che associa ad ogni vettore dello spazio vettoriale un certo numero reale. La forma quadratica è individuata da una matrice che individua entrata per entrata i valori che la forma assume su ciascuna delle coppie di vettori della base.

$$G(u, v) = [J_\varphi(u, v)]_T G(u'(u, v), v'(u, v)) [J_\varphi(u, v)] \quad J_\varphi = \begin{bmatrix} \frac{\delta u'}{\delta u} & \frac{\delta u'}{\delta v} \\ \frac{\delta v'}{\delta u} & \frac{\delta v'}{\delta v} \end{bmatrix}$$

con  $J_\varphi$  matrice jacobiana<sup>15</sup>.

## 5.5 Seconda forma fondamentale

Ancora più importante della prima forma fondamentale, in computer grafica. Descrive il comportamento del foglio semplice vicino a ciascuno dei suoi punti, soprattutto a livello qualitativo. In pratica bisogna riuscire a descrivere la natura di un foglio semplice nei dintorni di ogni suo punto.

È possibile scrivere le equazioni intrinseche del foglio semplice, ed il primo passo per farlo è andare a decomporre i vettori che costituiscono il sistema di riferimento mobile nella stessa base data dal riferimento mobile. Nel caso delle curve si lavorava con i tre versori  $\underline{b}$ ,  $\underline{t}$  ed  $\underline{n}$ , la differenza è che con i fogli semplici le funzioni risultano essere in due variabili, quindi bisogna calcolare le derivate rispetto ad  $u$  ed a  $v$ .

$$B(u, v) = \begin{bmatrix} b_{11}(u, v) & b_{12}(u, v) \\ b_{21}(u, v) & b_{22}(u, v) \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} b_{11} = \frac{P_{uu} \times N}{N} & b_{12} = \frac{P_{uv} \times N}{N} \\ b_{12} = \frac{P_{uv} \times N}{N} & b_{22} = \frac{P_{vv} \times N}{N} \end{matrix} \quad \text{con} \quad \frac{P_{uv}}{N} = \frac{P_{vu}}{N}$$

Si possono raggruppare le quattro funzioni  $b_{ij}$  in una matrice  $B = [b_{ij}]$  alla quale si può associare un'applicazione bilineare simmetrica e di conseguenza una forma quadratica definita sul piano tangente in un qualunque punto del foglio semplice. La forma quadratica rappresentata rispetto alla base standard della matrice  $B$  è la cosiddetta **seconda forma fondamentale II** e l'applicazione bilineare da cui deriva è così espressa:

$$II(\underline{a}, \underline{b}) = [\alpha \beta] B \begin{bmatrix} \gamma \\ \delta \end{bmatrix} \quad \underline{a}, \underline{b} \in Tp(S), \underline{a} \rightarrow \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}, \underline{b} \rightarrow \begin{bmatrix} \gamma \\ \delta \end{bmatrix}$$

Contrariamente alla matrice  $G$  della prima forma fondamentale, la matrice  $B$  dà luogo ad una forma quadratica che non è detto sia sempre definita positiva: infatti il segno del suo determinante fornisce utilissime informazioni riguardo a come è fatto il foglio semplice attorno al punto selezionato. La matrice  $B$  inoltre non è invariante quando si cambia la parametrizzazione del foglio.

### 5.5.1 Classificazione dei punti regolari di una superficie

Si studiano tutte le conseguenze deducibili dalle equazioni intrinseche del foglio semplice. In particolare si studia il comportamento della matrice  $B$ , dando un significato geometrico all'applicazione bilineare della II forma fondamentale. Si utilizza allora un sistema di riferimento opportuno per descrivere il comportamento del foglio semplice vicino a ciascuno dei suoi punti (come è stato fatto con le curve). Si valuta quindi per ciascun punto del foglio semplice la *distanza con segno* dal piano tangente nell'origine. Si vuole studiare se il generico punto  $\underline{P}(u, v)$  rispetto all'orientamento del versore normale  $\underline{N}$  in  $\underline{P}(0,0)$  sta al di sopra, al di sotto o giace sul piano tangente (dove il *semispazio positivo* è quello individuato dalla parte positiva del versore).

<sup>15</sup> **Matrice jacobiana.** Detta anche matrice di Jacobi è la matrice di una funzione che ha dominio e codominio in uno spazio euclideo i cui elementi sono le derivate parziali prime della funzione.

Invece di studiare la funzione in più variabili, si va a vedere cosa succede al variare delle direzioni uscenti dal punto considerato quindi al variare dei vettori  $\underline{a}$  dello spazio direttore del piano tangente. Quando si ha un vettore di questo tipo si può considerare una curva tracciata sul foglio semplice che passi per il punto dato con quella specifica direzione tangente. Si considera allora  $\underline{P}=\underline{P}(t)$  tale che  $\dot{\underline{P}}(0)=\underline{a}$  e si valuta

$$\underline{N}(0,0) \times \underline{P}(t) = f(t)$$

per capire se la funzione  $f(t)$  è positiva, nulla o negativa al variare del vettore  $\underline{a}$ . Si sviluppa allora in serie di Taylor:

$$f(t) = f(0) + f'(0)t + f''(0)\frac{t^2}{2} + \dots$$

con  $f(0) = 0$  e  $f'(0)$  perpendicolare al versore  $\underline{N}$ , quindi a sua volta nullo. Quindi, per studiare il comportamento di questa funzione, è necessario andare a vedere come si comporta  $\underline{N}(0,0) \times \dot{\underline{P}}(0)$  anche se non è immediata la definizione di tale funzione.

$$\begin{aligned} \dot{\underline{P}}(0) &= \frac{\partial \underline{P}}{\partial \underline{u}} \Big|_{(0,0)} \frac{d\underline{u}}{dt} \Big|_0 + \frac{\partial \underline{P}}{\partial \underline{v}} \Big|_{(0,0)} \frac{d\underline{v}}{dt} \Big|_0 \\ \ddot{\underline{P}}(0) &= \left( \frac{\partial^2 \underline{P}}{\partial \underline{u}^2} \Big|_{(0,0)} \frac{d\underline{u}}{dt} \Big|_0 + \frac{\partial^2 \underline{P}}{\partial \underline{u} \partial \underline{v}} \Big|_{(0,0)} \frac{d\underline{v}}{dt} \Big|_0 \right) \frac{d\underline{u}}{dt} \Big|_0 + \frac{\partial \underline{P}}{\partial \underline{u}} \Big|_{(0,0)} \frac{d^2 \underline{u}}{dt^2} \Big|_0 \\ &\quad + \left( \frac{\partial^2 \underline{P}}{\partial \underline{v} \partial \underline{u}} \Big|_{(0,0)} \frac{d\underline{u}}{dt} \Big|_0 + \frac{\partial^2 \underline{P}}{\partial \underline{v}^2} \Big|_{(0,0)} \frac{d\underline{v}}{dt} \Big|_0 \right) \frac{d\underline{v}}{dt} \Big|_0 + \frac{\partial \underline{P}}{\partial \underline{v}} \Big|_{(0,0)} \frac{d^2 \underline{v}}{dt^2} \Big|_0 \end{aligned}$$

Si ricorda che  $b_{ij} = \underline{N} \times \underline{P}_{ij}$  ottenendo, di conseguenza:

$$\begin{aligned} \underline{N}(0,0) \times \ddot{\underline{P}}(0) &= b_{11}(0,0)(\dot{u}(0))^2 + b_{12}(0,0)\dot{u}(0)\dot{v}(0) \\ &\quad + b_{21}(0,0)\dot{u}(0)\dot{v}(0) + b_{22}(0,0)(\dot{v}(0))^2. \end{aligned}$$

Questa espressione è esattamente il valore della II forma fondamentale lungo il vettore  $\underline{a}$ :

$$H(\underline{a}, \underline{a}) = \begin{bmatrix} \dot{u}(0) & \dot{v}(0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11}(0,0) & b_{12}(0,0) \\ b_{21}(0,0) & b_{22}(0,0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{u}(0) \\ \dot{v}(0) \end{bmatrix}$$

Se si vuole sapere come varia la quantità al variare della direzione uscente dal punto bisogna andare a vedere qual'è il valore della II forma fondamentale lungo tale direzione. Tale valore può essere positivo, nullo o negativo in dipendenza della matrice che rappresenta la forma nel punto. Se il vettore in questione ha coordinate del tipo

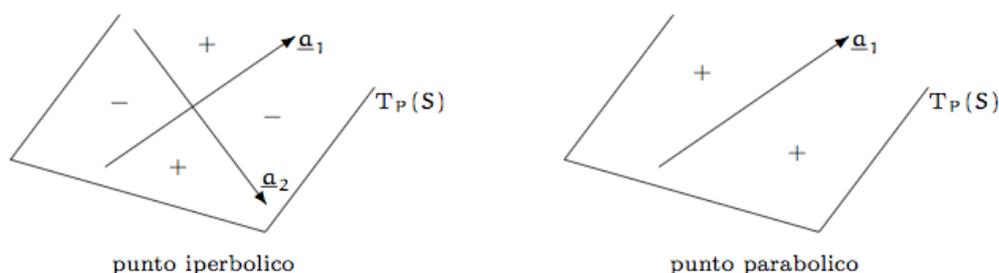
$$\underline{a} \rightarrow \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} \quad H(\underline{a}, \underline{a}) = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{21} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = b_{11}\alpha^2 + 2b_{12}\alpha\beta + b_{22}\beta^2$$

Per capire se l'espressione è positiva, nulla o negativa bisogna prendere in considerazione la disequazione di II grado associata nel rapporto  $\frac{\alpha}{\beta}$  e tale disequazione dipende dal discriminante dell'equazione di II grado relativa.

$$\frac{\Delta}{4} = b_{12}^2 - b_{11}b_{22} = -\det(B) = -b$$

Ciò significa che si possono distinguere i punti del foglio semplice in 3 grandi categorie.

- se  $\det(\mathbf{B}) > 0$  l'equazione ha due soluzioni complesse e la disequazione associata ha sempre il segno del primo coefficiente, allora la soluzione è sempre positiva o sempre negativa. Il punto P è quindi un **punto ellittico** e vicino a tale punto il foglio semplice sarà sempre da una parte rispetto al piano tangente.
- se  $\det(\mathbf{B}) < 0$  l'equazione ha due soluzioni reali distinte, quindi ci sono due direzioni  $\underline{a}_1, \underline{a}_2$  uscenti dal punto dette *asintotiche*, tali che calcolando la II forma fondamentale lungo questi vettori si ottiene 0 (si hanno due differenti direzioni asintotiche dove la II forma tende ad annullarsi); alternativamente il valore della II forma sarà o positivo o negativo. Il punto P è quindi un **punto iperbolico**. Si vengono a formare così due differenti porzioni di foglio semplice dove i punti si trovano al di sotto del piano tangente, mentre per altre due porzioni di foglio i punti si troveranno al di sopra del piano tangente (tipico della superficie a sella).
- se  $\det(\mathbf{B}) = 0$  si presentano due differenti sotto-casi: il **punto P** può essere **parabolico** se l'equazione ha una sola radice ma contata due volte, quindi possiede una sola direzione asintotica; nel caso in cui non sia possibile fermarsi all'analisi del second'ordine il **punto** sarà **piatto** (allora la matrice B è anche identicamente nulla) ma capita davvero molto raramente; il nome richiama il fatto che il supporto del foglio semplice nella vicinanza di un punto simile sia piatto, tuttavia non accade sempre che il supporto sia piatto nei pressi di punti piatti. Nel caso di punto parabolico la matrice B non può essere nulla, si ha quindi una sola direzione dove la seconda forma si annulla.



La matrice B cambia di segno al passaggio da un foglio semplice ad uno equivalente (ovvero quando cambia la direzione/verso del versore  $\underline{N}$ ). Questa matrice fa in modo che sia possibile studiare il comportamento locale del punto  $\underline{P}$  sul foglio.

**Direzioni coniugate.** Quando capita che  $II(\underline{a}, \underline{b}) = 0$  le direzioni uscenti dal punto P del foglio di superficie si dicono **coniugate**. Se si ha una curva tracciata sul foglio semplice, per ogni punto della curva si può considerare il piano tangente al foglio che individua una famiglia di piani tangenti. Tale famiglia di piani tangenti involupa una superficie rigata sviluppabile che ha delle generatrici che si appoggiano nei punti della curva che si sta considerando. In ciascuno di questi punti la direzione tangente alla curva utilizzata e la direzione data dalla retta generatrice della rigata sono due direzioni coniugate.

**Matrice X.** Con le matrici B e G a disposizione si può definire una nuova matrice generalmente non simmetrica, detta **matrice X**, data da:

$$X(u, v) = B(u, v)G^{-1}(u, v)$$

Molte delle informazioni relative alla natura del foglio semplice derivano dalla matrice  $G$ , bisogna quindi studiare se si possono desumere nuove informazioni tramite l'utilizzo delle matrici  $B$  ed  $X$ . La matrice  $X_T$  definisce un'applicazione lineare  $L_P$  quindi rappresenta la seguente trasformazione rispetto alla base standard:

$$L_P: T_P(S) \rightarrow T_P(S) \quad \underline{a} \rightarrow \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} \quad L_P(\underline{a}) \rightarrow X_T \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha' \\ \beta' \end{bmatrix} \quad \text{con} \quad \begin{aligned} \underline{a} &= \alpha \underline{P}_u + \beta \underline{P}_v \\ L_P(\underline{a}) &= \alpha' \underline{P}_u + \beta' \underline{P}_v \end{aligned}$$

Se si cambia la parametrizzazione anche le matrici  $X$  e  $X_T$  cambiano per similitudine, quindi siccome matrici simili individuano la stessa applicazione lineare, si può dire che l'applicazione lineare  $L_P$  (definita sul piano tangente) è effettivamente un'invariante del foglio semplice, punto per punto. Pertanto le caratteristiche di quest'applicazione devono comunicare delle informazioni aggiuntive sulla natura del foglio semplice.

Data una curva che passa per il punto  $\underline{P}$  della superficie, per ogni punto della curva si studia il comportamento del versore normale con la sua derivata. Siccome si tratta di un versore la sua derivata gli è sempre perpendicolare, quindi si tratta di un vettore del piano tangente. Va da sé che  $L_P(\underline{a})$  rappresenta l'opposto di tale vettore.

La traccia<sup>16</sup> ed il determinante di  $X_T$  (equivalente al determinante di  $X$ ), essendo invarianti per similitudine di matrici, sono invarianti rispetto al cambiamento di parametrizzazione del foglio semplice e danno delle utili informazioni su come esso è fatto.

**Curvatura media.** Si dice *curvatura media* la funzione

$$H(u, v) = \frac{1}{2} \text{tr}(X_T) = \frac{1}{2} \text{tr}(X)$$

**Curvatura di Gauss.** Si dice *curvatura di Gauss* la funzione

$$K(u, v) = \det(X_T) = \det(X) = \frac{\det(B)}{\det(G)} = \frac{b}{g}$$

Questi due scalari definiti punto per punto per ogni foglio semplice comunicano molte informazioni utili. La **curvatura media**, per esempio, può risultare nulla per alcuni fogli semplici, allora indica che si tratta di un tipo di fogli con *proprietà di superficie minima*: se si suppone di avere una curva *fortemente regolare* nello spazio senza nodi e chiusa, si possono trovare tutti i fogli semplici su cui la curva giace a patto che il loro valore di curvatura media sia nullo. La **curvatura di Gauss** aiuta ad identificare la natura dei punti del foglio semplice dal momento che costituisce il determinante della matrice  $B$ . Si utilizza molto la curvatura di Gauss poiché essa ha l'importante proprietà di soddisfare il *Theorema Egregium* che dice che, nonostante la curvatura di Gauss apparentemente derivi dalla I e dalla II forma fondamentale, essa dipende in realtà solamente dalla I forma fondamentale. Ciò implica che se si hanno due fogli semplici localmente isometrici, nei

16 **Traccia di una matrice.** In algebra lineare si definisce **traccia**  $\text{tr}(\mathbf{A})$  di una matrice  $\mathbf{A}$  la somma di tutti gli elementi della sua diagonale principale. Nel caso di endomorfismi di uno spazio vettoriale, è possibile definire la traccia di un endomorfismo considerando la traccia della sua matrice associata rispetto ad una qualsiasi base dello spazio. Poiché la traccia è invariante per similitudine, il suo valore non dipende dalla base scelta.

punti corrispondenti la curvatura di Gauss è esattamente la stessa.

### 5.5.1 Curvatura Normale

Si vuole analizzare più nel dettaglio il comportamento di un foglio semplice vicino ad un suo punto P. Si affina l'analisi già affrontata scegliendo di studiare il comportamento del foglio lungo una certa direzione  $\underline{a}$  la quale, affiancata dal versore normale in P (asse di una retta chiamata *asse normale*), individua un *piano*. L'asse normale è una retta che a sua volta è l'asse di un fascio di piani detti *piani normali*. Quindi va da sé che per ogni vettore  $\underline{a}$  è univocamente determinato un piano normale. Tale piano taglia il foglio semplice lungo una certa curva che risulta essere una curva piana e regolare; la curva passa per il punto P ed ha, in questo punto, per vettore tangente il vettore  $\underline{a}$ . Si può quindi studiare cosa accade al variare del vettore  $\underline{a}$  di tutte queste curve dette *curve sezioni normali*.

La curvatura delle curve sezioni normali nel punto P si chiama **curvatura normale**  $K_n(\underline{a})$  del foglio semplice nel punto P lungo la direzione individuata da  $\underline{a}$ .

La curvatura normale lungo una certa direzione  $\underline{a} \in T_P(S)$ ,  $\underline{a} \neq 0$  può essere intesa come:

$$K_n(\underline{a}) = \frac{II(\underline{a}, \underline{a})}{I(\underline{a}, \underline{a})} > 0$$

Se  $\underline{a}$  è un versore conta solo il numeratore, infatti se si prendono in considerazione solo le direzioni individuate dai versori resta solo  $II(\underline{a}, \underline{a})$ . Il legame con la matrice X è molto stretto, infatti nel calcolo della II forma fondamentale si scopre che

$$II(\underline{a}, \underline{b}) = L_P(\underline{a}) \times \underline{b} = \underline{a} \times L_P(\underline{b})$$

Un punto di un foglio semplice è detto **ombilico** se tutte le curvature normali in tale punto hanno lo stesso valore. Un punto ombilico dev'essere anche ellittico perchè tutte le curvature normali in esso sono uguali; è chiaro che se la curvatura dev'essere sempre costante il valore della II forma lungo ogni direzione individuata da versori dev'essere costante. Se il punto fosse parabolico ci sarebbe una direzione lungo la quale la forma si annulla e se fosse iperbolico la forma cambierebbe di segno ben due volte.

Tornando alla definizione data poco prima di curvatura normale, si suppone che  $\underline{a}$  sia un autovettore per la trasformata di Weingarten, ovvero che  $L_P(\underline{a}) = \lambda \underline{a}$  ottenendo

$$K_n(\underline{a}) = \frac{L_P(\underline{a}) \times \underline{a}}{I(\underline{a}, \underline{a})} = \lambda \frac{\underline{a} \times \underline{a}}{I(\underline{a}, \underline{a})} = \lambda$$

Diventa interessante chiedersi se  $L_P$  ha degli autovettori, e li ha davvero ammettendo al contempo una base ortonormale di autovettori poiché si tratta di un endomorfismo<sup>17</sup> simmetrico<sup>18</sup>. Essendo un endomorfismo simmetrico, per il teorema spettrale reale esso ammette una base ortonormale di autovettori

$$\underline{e}_1, \underline{e}_2 \quad \|\underline{e}_1\| = \|\underline{e}_2\| = 1 \quad \underline{e}_1 \perp \underline{e}_2$$

<sup>17</sup> **Endomorfismo.** L'endomorfismo di una struttura algebrica è una funzione dall'insieme sostegno della struttura in sé, che preserva le operazioni. In altre parole, è un morfismo della struttura algebrica in sé stessa.

<sup>18</sup> **Endomorfismo simmetrico.** Un endomorfismo simmetrico  $f: V \rightarrow V$  su uno spazio vettoriale reale dotato di prodotto scalare si dice simmetrico se  $\forall \underline{u}, \underline{v} \in V$  vale  $(f(\underline{v}), \underline{u}) = (\underline{v}, f(\underline{u}))$ . Il fatto che  $L_P$  sia un endomorfismo simmetrico non significa che la matrice che lo rappresenta lo sia.

Quindi è possibile rappresentare  $L_P$  rispetto a tale base così che la matrice rappresentativa sarà diagonale. Le direzioni dei due *autovettori* di  $L_P$  si chiamano **direzioni principali** ed i relativi *autovalori* si chiamano **curvature principali**. Per trovare la base dello spazio vettoriale basta calcolare in ogni punto P gli autovalori  $\lambda_1, \lambda_2$  della  $X_T$ : questi danno due soluzioni che corrispondono a due autovettori perpendicolari tra di loro, quindi è possibile individuare ogni direzione uscente dal punto P sul piano tangente in tale punto al foglio semplice di superficie tramite la base costituita da questa coppia di autovettori. Tali autovalori indicano i valori di curvatura in questione, associato  $L_P(\underline{e}_i) = \lambda_i \underline{e}_i, i = 1, 2$ .

$$K_n(\underline{e}_1) = II(\underline{e}_1, \underline{e}_1) = L_P(\underline{e}_1) \times \underline{e}_1 = \lambda_1 \underline{e}_1 \times \underline{e}_1 = \lambda_1 \|\underline{e}_1\|^2 = \lambda_1$$

Allora la **curvatura di Gauss** può essere resa da  $K = \lambda_1 \lambda_2$  mentre la **curvatura media** risulta essere uguale a  $H = \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2}$ . Tutto questo rende possibile il calcolo delle curvature normale e di Gauss in un punto note le due curvature principali e viceversa.

### 5.5.2 Teorema di Eulero

Il teorema di Eulero (sulle curvature normali) costituisce una modalità alternativa per la valutazione delle curvature normali. Il teorema è il seguente:

$$K_n(\underline{e}) = K_n(\theta) = \lambda_1 \cos^2 \theta + \lambda_2 \sin^2 \theta$$

**Dimostrazione.** Basta valutare  $K_n(\theta)$ .

$$\begin{aligned} K_n(\underline{e}) &= \frac{L_P(\underline{e}) \times \underline{e}}{I(\underline{e}, \underline{e})} = L_P(\underline{e}) \times \underline{e} = L_P(\cos \vartheta \underline{e}_1 + \sin \vartheta \underline{e}_2) \times \underline{e} \\ &= (\cos \vartheta L_P(\underline{e}_1) + \sin \vartheta L_P(\underline{e}_2)) \times \underline{e} \\ &= (\lambda_1 \cos \vartheta \underline{e}_1 + \lambda_2 \sin \vartheta \underline{e}_2) \times (\cos \vartheta \underline{e}_1 + \sin \vartheta \underline{e}_2) \\ &= \lambda_1 \cos^2 \vartheta + \lambda_2 \sin^2 \vartheta = K_n(\vartheta). \end{aligned}$$

Derivando rispetto a  $\theta$  si possono notare le curvature normali principali di massimo e di minimo (infatti le curvature principali sono dette anche curvature massima e minima). Questo è il motivo per cui le curvature principali si chiamano così: ogni curvatura normale si può ricavare a partire dalla conoscenza delle due curvature principali in funzione della misura dell'angolo  $\theta$ .

**Bellezza di una superficie.** Data da  $|\lambda_1| + |\lambda_2|$  oppure dall'espressione  $\lambda_1^2 + \lambda_2^2$ . Si tratta di funzioni che non sono banali da calcolare; una delle due deve inoltre avere una variazione contenuta ed entrambe devono essere lisce.

# **Appunti**

*sulle superfici*

# Capitolo 6

## Superfici di Bèzier

### 6.1 Introduzione

Si studiano ora tutte quelle *applicazioni candidate a diventare fogli semplici*. Nel caso delle **superfici di Bèzier** si parte dal quadrato/rettangolo unitario, che in questo caso risulta essere chiuso. Si prendono in considerazione polinomi definiti nel piano, va quindi definita una certa applicazione  $\underline{P}$ . Si studia infine come l'applicazione si comporta intervenendo sul suo **bigrado**  $(h, k)$  con  $h, k \geq 1$ .

La *griglia combinatoria* di una superficie di Bèzier modella il **poliedro di controllo** all'interno del quale esiste la superficie, ma lo fa in maniera combinatoria. Saranno  $P_{i,j}$  i punti della griglia combinatoria la quale avrà precise dimensioni  $(h+1)(k+1)$ . Il poliedro di controllo sviluppa l'applicazione  $\underline{P}$  nello spazio.

### 6.2 Interpolazione bilineare<sup>[9]</sup>

Si vuole basare la teoria del **prodotto tensoriale** delle superfici di Bèzier sul concetto di **interpolazione bilineare**. Mentre l'interpolazione lineare è il semplice “adattamento” di una curva tra due specifici punti, l'*interpolazione bilineare* altro non è che il semplice “adattamento” di una superficie tra 4 punti distinti.

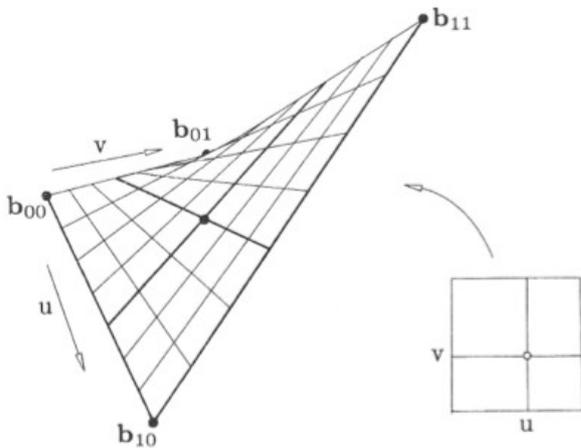
Per essere più precisi, siano  $b_{0,0}, b_{0,1}, b_{1,0}, b_{1,1}$  4 punti distinti in  $E^3$ .

L'insieme di tutti i punti  $x$  in  $E^3$  nella forma

$$x(u, v) = \sum_{i=0}^1 \sum_{j=0}^1 b_{i,j} B_i^1(u) B_j^1(v)$$

è chiamato **paraboloide iperbolico** attraverso i 4 punti  $b_{i,j}$ . Questa è la sua forma matriciale:

$$x(u, v) = \begin{bmatrix} 1-u & u \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{0,0} & b_{0,1} \\ b_{1,0} & b_{1,1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1-v \\ v \end{bmatrix}$$



Dalla prima delle due formule si desume che l'applicazione è lineare sia in  $u$  che in  $v$  ed interpola a partire dai punti dati in input, allora la superficie  $x$  viene chiamata *interpolante bilineare*. L'interpolante bilineare può essere visto come una mappa del quadrato unitario<sup>19</sup>  $0 \leq u, v \leq 1$  nel piano  $u, v$ ; si dice allora che il quadrato unitario è il *dominio* dell'interpolante mentre la superficie  $x$  è il suo *range*. Una retta parallela ad uno degli assi del dominio corrisponde ad una curva nel range ed è chiamata *curva isoparametrica*. Nello specifico, la retta isoparametrica  $u=0$  è mappata nella retta compresa tra  $b_{0,0}$  e  $b_{0,1}$ .

19 **Quadrato unitario.** Per intenderci, quello che “sottende” la superficie interpolata. Si immagini un sistema di assi cartesiani ed un quadrato di lato 1 disegnato in esso a partire dall'origine; la superficie interpolata non è altro che questo quadrato “sollevato” in uno dei 4 punti interpolati rispetto all'originale del quadrato unitario.

Invece di valutare l'interpolante bilineare in maniera diretta, si può adottare un processo composto da due passi distinti che impiegherà più tardi il contesto dell'interpolazione del prodotto tensore. Si computano due punti intermedi:

$$b_{0,0}^{0,1} = (1-v)b_{0,0} + vb_{0,1} \quad b_{1,0}^{0,1} = (1-v)b_{1,0} + vb_{1,1}$$

e si ottiene il risultato finale  $x(u, v) = b_{0,0}^{1,1}(u, v) = (1-u)b_{0,0}^{0,1} + ub_{1,0}^{0,1}$ . Così si calcolano prima i coefficienti della retta parametrica  $v = \text{cost}$  e quindi si valuta la retta parametrica in  $u$ . Calcolare prima i coefficienti in  $u$  quindi derivare i valori della retta parametrica in  $v$  presenta a posteriori i medesimi risultati.

Poiché l'interpolazione lineare in questione è anche una mappa affine e poiché si applica l'interpolazione lineare ad entrambe le direzioni  $u$  e  $v$ , si può parlare di una **mappa biaffine** per le *interpolazioni bilineari*.

La doppia rigatura ottenuta comunica che il foglio di Bèzier così ottenuto è anche un foglio semplice a sua volta doppiamente rigato con rigatura non sviluppabile. Detto questo è possibile disegnare qualsiasi tetraedro; quella appena illustrata altro non è se non una superficie di Bèzier di bigrado 1. Ogni superficie di Bèzier possiede quindi 4 punti di vertice (che nella situazione appena illustrata sono anche i vertici del poliedro di controllo) e 4 curve di bordo che sono nella fattispecie 4 curve di Bèzier (nel caso in esame si parla di 4 segmenti o rette dette rette isoparametriche).

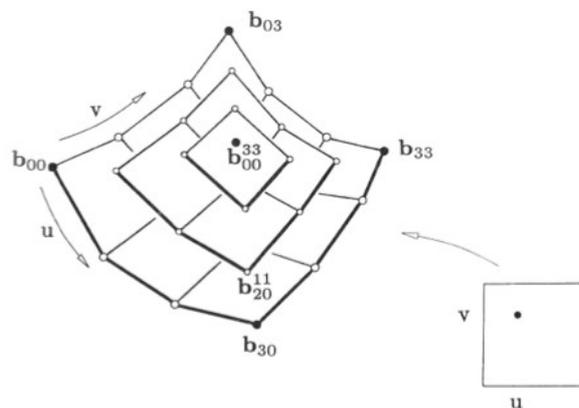
### 6.3 L'algoritmo di De Casteljaou

Le curve di Bèzier possono essere ottenute da un'applicazione ripetitiva dell'interpolazione lineare. Può funzionare alla stessa maniera anche per le superfici di Bèzier ottenute da una applicazione ripetitiva di un'interpolazione bilineare.

Si suppone di avere un array rettangolare di punti  $b_{i,j}; 0 \leq i, j \leq n$  e  $(u,v)$  come valori di parametro. Il seguente algoritmo genera un punto sulla superficie determinata dall'array di punti  $b_{i,j}$ . Dati  $\{b_{i,j}^{0,0}\}_{i,j=0}^n$  e  $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ :

$$b_{i,j}^{r,r} = [1-u \quad u] \begin{bmatrix} b_{i,j}^{r-1,r-1} & b_{i,j+1}^{r-1,r-1} \\ b_{i+1,j}^{r-1,r-1} & b_{i+1,j+1}^{r-1,r-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1-v \\ v \end{bmatrix} \quad \text{con} \quad \begin{matrix} r=1, \dots, n \\ i, j=1, \dots, n-r \end{matrix}$$

La rete venutasi a creare tra i punti  $b_{i,j}$  è chiamata **rete di Bèzier** o **rete di controllo** della superficie. I punti  $b_{i,j}$  sono detti punti di controllo o punti di Bèzier, come nel caso delle curve.



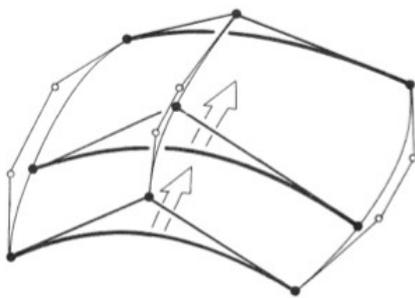
Nella pratica, sulla rete appena venutasi a creare si individuano una serie di quadrilateri (anche sghembi) all'interno dei quali, in maniera ricorsiva, si individuano punti sempre diversi i quali vengono a formare nuovi quadrilateri che, ad ogni iterazione, diminuiscono di numero. Alla fine di tutte le iterazioni si ottiene un unico quadrilatero con un unico punto, che è appunto il valore ricercato.

Il procedimento funziona bene solo quando la superficie è di bigrado  $(k,k)$  con  $h=k$ . Se i valori sono diversi la rete potrebbe essere rettangolare. I punti individuati all'ultimo passo dell'algoritmo allora saranno più di uno ed individueranno un segmento che altro non è se non una curva di Bèzier. A questo punto si può lavorare con l'algoritmo di De Casteljaeu applicato alle curve per trovare l'unico punto desiderato.

Un altro modo di procedere è dato dalla riduzione della griglia rettangolare in una quadrata, poiché esiste un metodo per innalzare il grado delle curve di Bèzier è possibile aumentare il numero di punti di vertice della griglia aggiungendone uno (da 4 a 5).

## 6.3 Prodotto tensoriale

Si vuole formalizzare un concetto intuitivo al fine ultimo di descrivere matematicamente una superficie. Per prima cosa si assume che la curva in movimento sia una curva di Bèzier di grado costante  $m$ . Ad ogni modo, la curva in movimento è determinata da una serie di punti di controllo. Ogni punto di controllo originale si muove nello spazio sulla curva. Oltre a ciò si assume che la curva sia *anche* una curva di Bèzier e che le curve sulle quali i punti di controllo si muovono siano tutte dello stesso grado.



Nella figura è rappresentato graficamente il prodotto tensoriale delle superfici di Bèzier<sup>20</sup>. Si formalizza come segue: sia innanzitutto la prima curva una vera curva di Bèzier di grado  $m$ :

$$b^m(u) = \sum_{i=0}^m b_i B_i^m(u).$$

Sia quindi ogni curva  $b_i$  della precedente equazione una traversa curva di Bèzier di grado  $n$ :

$$b_i = b_i(v) = \sum_{j=0}^n b_{i,j} B_j^n(v).$$

Non resta altro da fare che combinare le due equazioni per ottenere il punto  $b^{m,n}(u, v)$  sulla superficie  $b^{m,n}$ :

$$b^{m,n}(u, v) = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n b_{i,j} B_i^m(u) B_j^n(v).$$

Non è difficile provare che questa definizione di una superficie di Bèzier non è differente dalla definizione data attraverso l'algoritmo di De Casteljaeu.

Le curve di confine della superficie di Bèzier sono tutte curve polinomiali. I loro poligoni di Bèzier sono dati dai poligoni dei confini della rete di controllo. In particolare, i quattro angoli della rete di controllo giacciono tutti sulla superficie.

<sup>20</sup> **Prodotto tensoriale delle superfici di Bèzier.** La superficie è ottenuta dal movimento dei punti di controllo di una curva (quadratica) lungo altre curve di Bèzier (cubiche). In basso è rappresentata la superficie di Bèzier ultimata.

## 6.4 Incollamento di superfici di Bèzier

Per **incollare** le superfici di Bèzier si devono studiare tutti i polinomi/vettori derivati che corrispondono alle linee unitarie.

### 6.4.1 Innalzamento di grado

Si suppone di voler riscrivere la data superficie di Bèzier di bigrado  $(m,n)$  come una nuova superficie di bigrado  $(m+1, n)$ .

$$b^{m,n}(u, v) = \sum_{j=0}^n \left[ \sum_{i=0}^{m+1} b_{i,j}^{(1,0)} B_i^{m+1}(u) \right] B_j^n(v)$$

$$b_{i,j}^{(1,0)} = \left(1 - \frac{i}{m+1}\right) b_{i,j} + \frac{i}{m+1} b_{i-1,j} \quad \text{con} \quad \begin{matrix} i=0, \dots, m+1 \\ j=0, \dots, n \end{matrix}$$

Una superficie a prodotto tensoriale viene elevata in grado nella direzione  $u$  lavorando su tutte le colonne della rete di controllo intese come poligoni di Bèzier costituiti da curve di  $m$ -esimo grado le quali vengono, una per una, elevante in grado. L'elevazione di grado nella direzione  $v$  avviene nella stessa maniera. Si può innalzare il grado in entrambe le direzioni contemporaneamente, performando per esempio l'elevazione di grado prima in una poi nell'altra direzione.

$$b_{i,j}^{(1,1)} = \begin{bmatrix} \frac{i}{m+1} & 1 - \frac{i}{m+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{i-1,j-1} & b_{i-1,j} \\ b_{i,j-1} & b_{i,j} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{j}{n+1} \\ 1 - \frac{j}{n+1} \end{bmatrix} \quad \text{con} \quad \begin{matrix} i=0, \dots, m+1 \\ j=0, \dots, n+1 \end{matrix}$$

### 6.4.2 Derivate

Le derivate che si considerano sono derivate parziali, ovvero vettori tangenti ad una curva isoparametrica.

$$\frac{\delta}{\delta u} b^{m,n}(u, v) = \sum_{j=0}^n \left[ \frac{\delta}{\delta u} \sum_{i=0}^m b_{i,j} B_i^m(u) \right] B_j^n(v)$$

I termini nelle parentesi quadre dipendono unicamente da  $u$ , quindi si può applicare la formula per le derivate delle curve di Bèzier in maniera diretta:

$$\frac{\delta}{\delta u} b^{m,n}(u, v) = m \sum_{j=0}^n \sum_{i=0}^{m-1} \Delta^{1,0} b_{i,j} B_i^{m-1}(u) B_j^n(v) \quad \text{con} \quad \Delta^{1,0} b_{i,j} = b_{i+1,j} - b_{i,j}$$

$$\frac{\delta}{\delta v} b^{m,n}(u, v) = n \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^{n-1} \Delta^{0,1} b_{i,j} B_j^{n-1}(v) B_i^m(u) \quad \text{con} \quad \Delta^{0,1} b_{i,j} = b_{i,j+1} - b_{i,j}$$

Non è difficile scrivere il caso generale chiamato *parziali misti* di ordine arbitrario:

$$\frac{\delta^{r+s}}{\delta u^r \delta v^s} b^{m,n}(u,v) = \frac{m!n!}{(m-r)!(n-s)!} \sum_{i=0}^{m-r} \sum_{j=0}^{n-s} \Delta^{r,s} b_{i,j} B_i^{m-r}(u) B_j^{n-s}(v)$$

Si ricorda che i coefficienti  $\Delta^{r,s} b_{i,j}$  sono vettori e non “vivono” in  $E^3$ .

La derivata parziale di una superficie valutata in ogni punto è essa stessa una superficie valutata in ogni suo vettore.

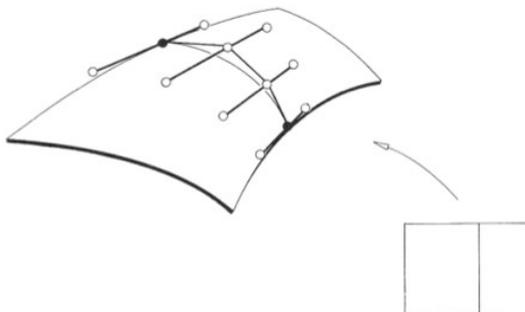
**Superfici di Bèzier traslazionali.** Si tratta di superfici costituite da una quantità di *patches* (ovvero di quadrilateri affiancati) tra loro tutte planari. Il *vettore derivato misto* di tale superficie risulta essere nullo  $\rightarrow P(u,v)=0$

**Superfici degeneri.** Il quadrato unitario dal quale ha origine la superficie finisce in una porzione di spazio con soli 2 o 3 lati anziché 4. Una funzione con un tale comportamento non è assolutamente iniettiva e non individua per nessuna ragione un foglio semplice (quindi non individua il piano tangente in nessun punto della superficie). Capitano tuttavia situazioni in cui, per incollare fogli di Bèzier sorgerebbero problemi se non si avesse a disposizione un foglio a 3 lati anziché a 4. Le superfici degeneri sono utili per realizzare i giunti di alcune progettazioni di incollamento superfici. Si può comunque calcolare il versore normale nel punto collassato utilizzando alcuni accorgimenti, prendendo per esempio alcuni punti che convergono verificando che siano tra loro complanari. Ci sarà comunque un punto di queste superfici in cui non è MAI possibile calcolare il piano tangente al foglio.

### 6.4.3 Superfici Spline

Si tende a voler incollare superfici di Bèzier tra loro esattamente per il medesimo motivo per il quale si voleva effettuare l'incollamento tra curve di Bèzier. Si ricorda che la somma dei polinomi di Bernstein all'interno del quadrato unitario da sempre 1. Vale anche la *proprietà di precisione lineare* per la quale la superficie ottenuta è a sua volta una porzione di piano. Per riassumere: tutte le proprietà delle curve di Bèzier si applicano anche alle superfici; e come le proprietà, anche i difetti delle curve di Bèzier sussistono anche per le superfici di Bèzier: tali superfici non sono capaci di esercitare controllo locale salvo che nel caso di incollamento tra piccole superfici.

Quando si vuole effettuare l'incollamento tra superfici di Bèzier ci si serve sempre di fogli di bigrado (3,3). Si hanno quindi due superfici di Bèzier  $P$  e  $Q$  e si suppone che si voglia incollare i loro supporti sullo stesso lato di entrambe (tuttavia non si tratta della situazione più generale).



È abbastanza ovvio che le due superfici, per essere incollate tra loro, debbano avere lo stesso bigrado.

**Condizione di incollamento  $C^0$ .** I supporti delle due superfici devono essere a contatto tra loro per l'intera lunghezza della curva facente da “confine” per quel lato di entrambe le superfici di Bèzier  $\rightarrow P(1,v)=Q(0,v')$  con  $[v=v']$ .

**Condizione di incollamento  $C^1$ .** La seguente condizione garantisce che la variazione del piano tangente per la nuova superficie venutasi a formare sia comunque continua quando i vettori coincidono.

$$\underline{P}_u(1, v) = \underline{Q}_u(0, v') \quad \underline{P}_v(1, v) = \underline{Q}_v(0, v')$$

Una delle due condizioni risulta essere superflua (l'incollamento di classe  $C^1$  prevede anche l'incollamento di classe  $C^0$ ). Poichè la curva di incollamento delle due superfici risulta essere la medesima in questo caso preso in esame, entrambi i vettori  $\underline{P}_v$  e  $\underline{Q}_v$  in qualche modo coincidono già e l'unica cosa da verificare rimane il comportamento del vettore tangente trasverso. Bisogna quindi calcolare i vettori in  $\underline{P}$  e poi in  $\underline{Q}$ .

$$\underline{P}_u(u, v) = h \sum_{i=0}^{h-1} B_i^{h-1}(u) \sum_{j=0}^k B_j^k(v) \Delta^{1,0}(P_{i,j}) \quad \underline{Q}_u'(u', v') = h \sum_{i=0}^{h-1} B_i^{h-1}(u') \sum_{j=0}^k B_j^k(v') \Delta^{1,0}(Q_{i,j})$$

Quindi si valutano i due polinomi come segue:

$$h \sum_{j=0}^k B_j^k(v) \Delta^{1,0}(P_{h-1,j}) = ? h \sum_{j=0}^k B_j^k(v) \Delta^{1,0}(Q_{i,j}) \quad \forall v \in [0,1]$$

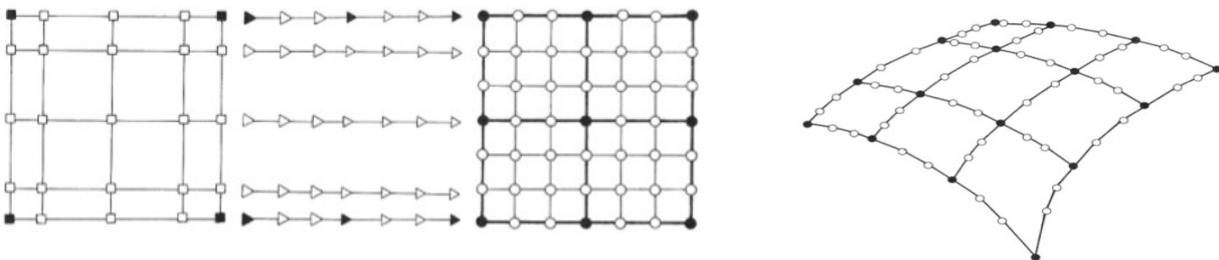
E' chiaro che i punti  $P_{h-1,j} = Q_{i,j}$  devono coincidere. Così risulta che:

$$\forall j = 0, \dots, k \quad P_{h,j} - P_{h-1,j} = Q_{i,j} - Q_{0,j}$$

Tale condizione indica che bisogna sempre studiare anche il comportamento dei punti precedenti alla curva di incollamento (e non solo quelli della curva di incollamento stessa), perchè anche questi punti devono essere tra loro allineati ed i segmenti che individuano devono essere tra loro uguali, va da sé che deve coincidere anche il loro rapporto semplice. La maniera in cui vengono alla luce queste **superfici spline** prevede l'insorgere di qualche problema solo quando le superfici di Bèzier sono molte e si toccano tra loro su più di un solo lato; inoltre non è sempre detto che esistano superfici di Bèzier adatte per essere incollate tra loro od ad altre superfici (anche se di solito gli incollamenti avvengono a strisce, non è detto che l'incollamento escogitato vada comunque a buon fine).

#### 6.4.4 Superfici spline generalizzate

Si parla di *superfici spline generalizzate con curve spline generalizzate* quando si ha a che fare con una cospicua quantità di superfici da incollare tutte assieme in un colpo solo. Dette anche superfici **B-Spline** (razionali e non razionali), queste ricoprono un ruolo molto importante negli odierni metodi di progettazione di superfici. Ci si chiede se a partire da una superficie spline bicubica sia possibile risalire alla griglia di Bèzier di ciascuna patch (a sua volta di Bèzier) della superficie spline. Bisogna interpretare la griglia di controllo della superficie spline riga per riga come se si trattasse di una serie di poligoni B-Spline invarianti e quindi convertirli nella forma di Bèzier. Lo stesso si fa colonna per colonna: la famiglia di poligoni di Bèzier ottenuta alla fine delle conversioni costituisce l'interpretazione della forma di Bèzier della superficie spline.



$$\underline{P}(u, v) = \sum_{i=0}^h \sum_{j=0}^k B_i^h(u) B_j^k(v) \underline{P}_{i,j} \quad \text{allora} \quad \underline{P}(u, v) = \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n'-1} B_{i,h}(u) B_{j,k}(v) \underline{P}_{i,j}$$

con  $m=n+h$  e  $m'=n'+k$ . Si viene a creare così una griglia molto complessa. Il controllo locale sarà allora fortissimo in ogni punto della superficie. Questo genere di superficie risolve egregiamente il problema delle interpolazioni per cui al variare della posizione di un punto il risultato che si ottiene tende a cambiare di molto. Comunque, con questo metodo è possibile interpolare un alto numero di punti distinti.

### Interpolazione standard.

$$\underline{P}(u, v) = [B_0^h(u) B_1^h(u) \dots B_h^h(u)] \begin{bmatrix} \underline{P}_{00} & \underline{P}_{01} & \dots & \underline{P}_{0k} \\ \underline{P}_{10} & \underline{P}_{11} & \dots & \underline{P}_{1k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \underline{P}_{h0} & \underline{P}_{h1} & \dots & \underline{P}_{hk} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_0^k(v) \\ B_1^k(v) \\ \dots \\ B_k^k(v) \end{bmatrix}$$

Quella appena espletata è la **forma matriciale** di una qualsiasi superficie di Bèzier (composta nella seconda parte da una matrice formale). Torna molto utile per calcolare l'**interpolazione standard**: quindi, scelta una griglia di punti, si associa ad ogni punto  $\underline{Q}_{\alpha,\beta} \in E^3, \forall \alpha, \beta$   $\underline{P}(u_\alpha, v_\beta) = \underline{Q}_{\alpha,\beta}$ . Si tratta comunque di un problema che ha una ed una sola soluzione.

Alla formula relativa alla forma matriciale della superficie di Bèzier è possibile aggiungere valori ad entrambi i vettori iniziale (riga) e finale (colonna) così da ottenere una serie di matrici rettangolari, così si ottengono tutti i punti della nuova superficie  $\underline{Q}$ . I punti della superficie  $\underline{P}$  di partenza non si conoscono, tuttavia essendo anche le altre matrici note oltre a quella dei punti di  $\underline{Q}$  è possibile comunque ricavarli.

$$[\underline{Q}] = [A][\underline{P}][B] \quad [\underline{P}] = [A]^{-1}[\underline{Q}][B]^{-1}$$

Dove A e B sono *matrici invertibili*. Se si avessero più punti da interpolare rispetto a quelli già indicati si avrebbe a che fare con matrici non quadrate, allora non si avrebbero soluzioni. Si può comunque provare a calcolare una soluzione approssimata sfruttando la matrice **inversa sinistra**, quando esiste.

$$A^+ A [\underline{P} B] = A^+ \underline{Q} \rightarrow \underline{P} B = \underline{D} \quad \text{allora} \quad B_T \underline{P}_T = \underline{D}_T \rightarrow \underline{P}_T = (B_T)^+ \underline{D}_T$$

Ovviamente se al posto di superfici di Bèzier si utilizzassero delle superfici spline si potrebbero interpolare molti più punti.

**Superfici LOFT.** Si tratta di superfici simili alle superfici rigate. Solitamente presentano un bigrado del tipo (h,1), e si definiscono come segue:

$$\underline{P}(u, v) = \sum_{i=0}^h B_i^h(u) \sum_{j=0}^k B_j^k(v) \underline{P}_{i,j} \quad \text{con} \quad \begin{matrix} B_0^1(v) = 1 - v \\ B_1^1(v) = v \end{matrix}$$

allora

$$(1-v) \sum_{i=0}^h B_i^h(u) \underline{P}_{i,0} + v \sum_{j=0}^k B_j^k(v) \underline{P}_{i,1} = \sum_{i=0}^h B_i^h(u) \underline{P}_{i,0} + v \sum_{j=0}^k B_j^k(v) (\underline{P}_{i,1} - \underline{P}_{i,0}) = \underline{R}(u) + v \underline{L}(u)$$

In questa maniera è possibile creare una superficie rigata a partire da una superficie di Bèzier in maniera tutto sommato semplificata.

## 6.5 Interpolazione per curve

Si parla di creare delle superfici interpolando tra loro una serie di curve posizionate tra loro a formare una griglia, in questa maniera si forza la futura superficie a contenere tutte le curve in questione all'interno del suo stesso supporto. In questa maniera può capitare che ciascuna curva sia a sua volta una **spline cubica** così che ogni suo arco sia a sua volta ancora una **curva di Bèzier cubica**. Ovviamente si da per scontato che ogni curva di Bèzier cubica sia saldamente incollata alle sue vicine.

Venutasi a creare la griglia di curve, l'unica influenza che si può esercitare sulla griglia dall'esterno è sui suoi quattro punti centrali identificati nella rete di punti di controllo associata all'apertura tra gli archi di ciascuna curva.

Esistono diverse *tecniche standard* per la determinazione e la scelta di questi quattro punti appartenenti alla suddetta griglia.

### 6.5.1 Matrice di Coons

La **matrice di Coons** rappresenta una modalità efficace per elencare tutti e 16 i punti del poliedro di controllo di una superficie di Bèzier da interpolare. Tale matrice si presenta come:

$$\begin{bmatrix} \underline{P}_{00} & \underline{P}_{01} & \underline{P}_v(0,0) & \underline{P}_v(0,1) \\ \underline{P}_{10} & \underline{P}_{11} & \underline{P}_v(1,0) & \underline{P}_v(1,1) \\ \underline{P}_u(0,0) & \underline{P}_u(0,1) & \underline{P}_{uv}(0,0) & \underline{P}_{uv}(0,1) \\ \underline{P}_u(1,0) & \underline{P}_u(1,1) & \underline{P}_{uv}(1,0) & \underline{P}_{uv}(1,1) \end{bmatrix}$$

Dove, se la si considera suddivisa in quattro macro-aree, quella in alto a destra rappresenta i vettori tangente al segmento verticale, quella in basso a sinistra il vettore tangente al segmento orizzontale e la rimanente in basso a destra rappresenta la posizione dei quattro punti rimasti dedotta dai dati già inseriti nella matrice.

In questa maniera si evita di assegnare automaticamente tutti i 16 punti della griglia. Il vantaggio sta nel fatto che per creare la superficie è sufficiente conoscere le quattro curve di bordo e non tutti i vari punti della griglia, così da ricavare solo i quattro punti necessari, ovvero quelli centrali.

### 6.5.2 Soluzione di Adini

Questo metodo è stato introdotto nella letteratura CAGD attraverso il paper di Barnhill, Brown e Klucewicz i quali si sono basati, a loro volta, sullo schema del *rettangolo di Adini* proveniente dalla tradizionale letteratura sugli elementi finiti. L'idea di base è questa: le quattro curve cubiche di confine definiscono una *superficie di Coons* bilineare la quale può essere essa stessa una superficie bicubica.

Se dev'essere generata una rete organizzata di superfici, la soluzione di Adini non mira a garantire la creazione di una superficie  $C^1$ . È necessario effettuare una semplice modifica, lasciando che le quattro superfici relative ai quattro angoli della superficie primaria si incontrino in un unico punto comune. Le quattro curve esterne delle diverse superfici definiscono ancora una superficie di Coons bilineare. Tale superficie di Coons (consistente

di quattro bicubiche) possiede un TWIST ben definito in corrispondenza del valore di parametro dove si incontrano le quattro bicubiche. Il tutto è dato da:

$$x_{uv}(u_i, v_j) = \frac{x_v(u_{i+1}, v_j) - x_v(u_{i-1}, v_j)}{u_{i+1} - u_{i-1}} + \frac{x_u(u_i, v_{j+1}) + x_u(u_i, v_{j-1})}{v_{j+1} - v_{j-1}} - \frac{-x(u_{i+1}, v_{j+1}) - x(u_{i-1}, v_{j+1}) - x(u_{i+1}, v_{j-1}) \pm x(u_{i-1}, v_{j-1})}{(u_{i+1} - u_{i-1})(v_{j+1} - v_{j-1})}$$

Risulta facile verificare che il metodo di Adini, applicato ai confini delle superfici di una superficie traslazionale, YELDS ZERO TWISTS, cosa desiderabile in quelle situazioni in cui la soluzione di Adini può costituire una scelta ragionevole poiché, considerato come un interpolante, esso riproduce alla perfezione tutti i bivarianti polinomiali della forma  $uv^j, u^i v$  con  $i, j \in 0, 1, 2, 3$ .

Esistono tante altre soluzioni assai più complicate di quella di Adini le quali partono comunque tutte da una griglia di curve tutte note ed incollate tra loro. Ci sono infatti alcuni metodi che intendono assegnare la superficie spline in maniera semplificata partendo da conoscenze o informazioni ulteriori.

### 6.5.3 Soluzione di Fergusson

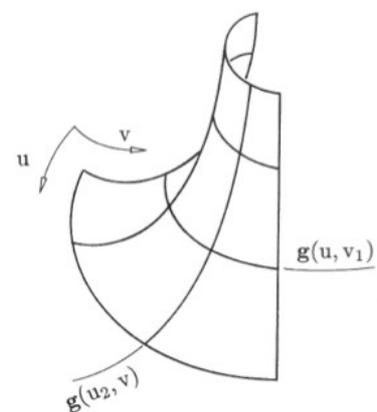
Secondo Fergusson tutti i quadrilateri laterali saranno tra loro complanari. Si tratta di una soluzione poco utilizzata poiché è facile che fallisca a livello di progettazione e design perdendo in aspetto estetico. Tende a produrre un **effetto spot** il quale viene a creare delle *macchie* sulla superficie interpolata. I quattro parallelogrammi o quadrilateri di partenza producono quindi una superficie piatta.

Esistono molte soluzioni alternative che non sono affatto banali ma guadagnano molto a livello di senso estetico.

### 6.5.4 Soluzione di Gordon

Le **superfici di Gordon** non sono altro che generalizzazioni delle superfici di Coons. Tali superfici sono state sviluppate nei tardi anni '60 da W. Gordon il quale lavorava per i laboratori di ricerca della General Motors.

Capita che non sia sufficiente modellare una superficie a partire da solamente quattro curve di bordo. Una situazione molto più complicata e realistica sussiste quando si individua una *rete di curve* (come nella figura qui a fianco). Si costruirà quindi una superficie **g** che interpola tutte queste curve (le quali saranno a loro volta tutte curve isoparametriche  $g(u_i, v); i=0, \dots, m$  e  $g(u, v_j); j=0, \dots, n$ ). L'idea che si nasconde dietro la costruzione della *superficie g* di Gordon è la stessa che sottendono le superfici di Coons: trovare una superficie  $g_1$  che interpoli una famiglia di curve parametriche, come per esempio  $g(u, v)$ . Dopodichè si tratta di trovare una nuova superficie  $g_2$  che interpoli a sua volta una nuova famiglia di curve parametriche come  $g(u, v_j)$ . Per concludere, si tratta di unire tra loro queste due superfici per sottrarre da essere la superficie  $g_{12}$ .



$$g(u, v) = g_1(u, v) + g_2(u, v) - g_{12}(u, v)$$

Si calcolano quindi le 3 superfici in questione.

$$g_1(u, v) = \sum_{i=0}^m g(u_i, v) L_i^m(u) \quad g_2(u, v) = \sum_{j=0}^n g(u, v_j) L_j^n(v)$$

$$g_{12}(u, v) = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n g(u_i, v_j) L_i^m(u) L_j^n(v)$$

dove L è il polinomio di Lagrange e  $g_{12}$  non è altro che l'interpolazione del prodotto tensore della superficie.

L'interpolante di Gordon si utilizza solo in certe situazioni come, per esempio, nel caso delle superfici rotanti. Dimostra che il formalismo di Bèzier non sempre torna utile.

### 6.5.5 Soluzione di Coons

Una superficie traslazionale può essere vista anche come la soluzione di un problema di interpolazione: date due curve secanti tra loro si può trovare quella superficie che le contiene come curve di confine o di bordo. Se sono date quattro curve di bordo, esattamente come nella definizione di problema per le superfici di Coons bilineari, si possono formare quattro superfici traslazionali, una per ogni angolo della griglia. Si denota quindi con  $\underline{P}_{i,j}$  la superficie traslazionale che interpola quelle curve di bordo che a loro volta si incontrano nell'angolo  $(i, j); i, j \in \{0, 1\}$ . In questa maniera la superficie bilineare di Coons può essere descritta come segue:

$$\underline{P}(u, v) = \underline{P}_1(u, v) + \underline{P}_2(u, v) - \underline{P}_{12}(u, v) \quad \text{con}$$

$$\underline{P}_1(u, v) = (1-v) \underline{P}^1(u) + \underline{P}^2(u) v \quad \underline{P}_{12}(u, v) = \begin{bmatrix} 1-u & u \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{P}_{00}(u, v) & \underline{P}_{01}(u, v) \\ \underline{P}_{10}(u, v) & \underline{P}_{11}(u, v) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1-v \\ v \end{bmatrix}$$

$$\underline{P}_2(u, v) = (1-u) \underline{Q}^1(v) + \underline{Q}^2(v) u$$

Ottenendo che la superficie bilineare di Coons equivale a  $x(u, v) = \underline{P}_{12}(u, v)$  detta forma della *combinazione convessa*. Fondendo assieme quattro superfici distinte, si pesa ognuna di esse tramite una funzione pesata.

Si tratta di una soluzione ottimale per la produzione di una superficie sufficientemente regolare dalla quale è possibile ricavare un foglio semplice. Queste superfici non hanno alcun problema di controllo locale; l'unico problema che sorge riguarda il fatto che si possono interpolare solamente quelle specifiche quattro curve, per cui diventa molto difficile incollare tra loro superfici di questo tipo.

---

## Appunti

sulle superfici di Bèzier



# Capitolo 7

## Curve e Superfici Razionali

### 7.1 Introduzione

Con tutto il formalismo visto sinora non è ancora possibile disegnare una *circonferenza* vera e propria perchè le curve di Bèzier non sono altro che incollamenti di archi di parabola (così anche le curve spline). Vanno bene per ingannare l'occhio, ma per costruire un modello geometricamente corretto di circonferenza non bastano più. Si pensi che avvalendosi di curve spline di grado 2 non si riuscirebbe nemmeno a disegnare un *ellisse* od un' *iperbole*.

Si consideri un *doppio cono* costituito da un **punto** (nel quale si uniscono i vertici dei due coni) ed una **retta** che oscilla vincolata in quello stesso punto. La struttura appena individuata può essere tagliata da un **piano** in varie modalità così da individuare in essa attraverso le sezioni così ottenute tutte le cosiddette **sezioni coniche** (o semplicemente **coniche**) esistenti. Se il cono viene tagliato da un piano perpendicolare si ottiene una circonferenza perfetta; altrimenti, se la struttura viene tagliata da un piano un po' inclinato si ottiene un' *ellisse*. Se il piano secante rimane sempre parallelo alla retta generatrice della struttura si individua facilmente una parabola (od un arco di parabola); se il piano rimane parallelo all'asse interno della struttura si ottiene un' iperbole.

È facile capire che ciascuna di queste curve è facilmente ottenibile grazie ad una **proiezione sul piano** perpendicolare all'asse della struttura di coni, ed è possibile ottenere qualsiasi curva a partire da qualsiasi arco di conica. Con Bèzier sarà quindi possibile costruire archi di parabola che, opportunamente proiettati, possono per esempio parametrizzare gli archi di una circonferenza.

Tali curve sono dette **curve razionali** poiché ricavate da un *quoziente di polinomi*.

#### 7.1.1 Coniche come Quadratiche Razionali

Esistono moltissimi modi per definire una sezione conica; uno dei più utili consiste nel dire che una sezione conica in  $E^2$  è la proiezione di una parabola in  $E^3$  su di un piano. Quando si arriva a formulare una curva conica come una curva razionale, si è soliti abbandonare il principio di dipendenza per un sistema di coordinate fissato. Tipicamente si sceglie l'origine della proiezione nel punto  $o$  di origine di un sistema 3D di coordinate cartesiane. Il piano sul quale avvengono le proiezioni è individuato dal piano  $z=1$ ; si può assodare che il piano così individuato sia una copia di  $E^2$  all'interno del quale i punti prima individuati con le coordinate  $(x,y)$  ora siano individuabili tramite le coordinate  $(x,y,1)$ . Questa speciale proiezione è caratterizzata come segue:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} x/z \\ y/z \\ 1 \end{bmatrix}$$

Si noti che il punto  $(x,y)$  è la proiezione di un'intera famiglia di punti: ogni punto sulla retta  $(wx, wy, w)$  viene proiettato nel punto  $(x,y)$ .

Si pensi di voler individuare una retta all'interno di questo spazio 3D, la quale interseca il piano  $z=1$  (indicato anche come  $U=1$ ). La retta è così individuata:

$$\begin{aligned}x &= 0 + t(x_0 - 0) = tx_0 \\y &= 0 + t(y_0 - 0) = ty_0 \\U &= 0 + t(U_0 - 0) = tU_0\end{aligned} \quad \text{con } tU_0 = 1 \rightarrow t = \frac{1}{U_0} \rightarrow U = 1$$

ottenendo così  $\begin{matrix} x_0 = x_0 / U_0 = x_0 \\ y_0 = y_0 / U_0 = y_0 \\ U_0 = 1 \end{matrix}$ . Il punto  $\underline{P}_0 \equiv (x_0, y_0)$  si proietta in  $\underline{\tilde{P}}_0 \equiv (x_0, y_0, U_0)$ .

## 7.2 Curve Razionali di Bèzier

Nel paragrafo precedente si è ottenuta una sezione conica in  $E^2$  come proiezione di una parabola (quadratica) in  $E^3$ . Le sezioni coniche possono quindi essere espresse come curve razionali quadratiche (di Bèzier).

Si parte la trattazione di queste curve razionali prendendo in considerazione l'esistenza di **3 punti** distinti  $\underline{P}_0, \underline{P}_1, \underline{P}_2 \in \mathbb{R}^2$  giacenti sul piano  $U=1$  ai quali vengono associati una serie di **pesi**  $w_0, w_1, w_2$  reali positivi. I punti in questione saranno tutti espressi nella forma

$$\underline{P}_0 \rightarrow \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ 1 \end{bmatrix}, \underline{P}_1 \rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

ed i corrispettivi punti dai quali questi vengono proiettati, segnati come  $\underline{\tilde{P}}_0, \underline{\tilde{P}}_1, \underline{\tilde{P}}_2$  sono dati dalle coordinate dei punti proiettati moltiplicate ciascuna per i pesi associati a quei punti, nella forma

$$\underline{\tilde{P}}_0 \rightarrow \begin{bmatrix} x_0 w_0 \\ y_0 w_0 \\ w_0 \end{bmatrix}, \underline{\tilde{P}}_1 \rightarrow \begin{bmatrix} x_1 w_1 \\ y_1 w_1 \\ w_1 \end{bmatrix}$$

così che, riassumendo, si può dire che  $\underline{\tilde{P}}_i \rightarrow \underline{P}_i$  con  $i=0, \dots, r$ . Comunque avvenga la scelta dei pesi da associare ai punti proiettati, la proiezione avviene sempre e comunque. I pesi si scelgono convenzionalmente in maniera tale che la proiezione finisca in una effettiva curva razionale da ricostruire.

Stando a quanto appena detto, la formula di una generica **curva razionale di Bèzier** di secondo grado è la seguente:

$$\underline{\tilde{P}}(t) = (1-t)^2 \begin{bmatrix} w_0 x_0 \\ w_0 y_0 \\ w_0 \end{bmatrix} + 2(1-t)t \begin{bmatrix} w_1 x_1 \\ w_1 y_1 \\ w_1 \end{bmatrix} + t^2 \begin{bmatrix} w_2 x_2 \\ w_2 y_2 \\ w_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \\ U(t) \end{bmatrix} \quad \text{dove } \begin{bmatrix} x(t) = x/U \\ y(t) = y/U \end{bmatrix}$$

$$D_2(t) = (1-t)^2 w_0 + 2(1-t)t w_1 + t^2 w_2$$

Va da se che la curva possa essere espressa anche nella forma:

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = \frac{(1-t)^2 w_0}{D_2(t)} \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} + \frac{2(1-t)t w_1}{D_2(t)} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} + \frac{t^2 w_2}{D_2(t)} \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

che, se generalizzata, risulta essere la seguente:

$$P(t) = \sum_{i=0}^r \frac{B_i^r(t) w_i}{D_i(t)} P_i \quad \text{con } t \in [0,1] \quad \text{e} \quad D_r(t) = \sum_{i=0}^r B_i^r(t) w_i$$

Quella appena espletata è la formula della **curva razionale di Bèzier**. Si ricorda che il poligono di controllo della curva di partenza contiene perfettamente anche la curva proiettata (dopotutto i punti di cui si è tanto discusso poco prima altro non sono se non i vertici del poligono di controllo della curva di Bèzier nello spazio).

### 7.2.1 L'importanza dei pesi

Tutte le curve razionali dipendono dalla natura dei loro **pesi**. È sbagliato affermare però che esistono tante curve diverse a seconda delle triplette dei pesi: terne proporzionali tra loro danno luogo alle stesse medesime curve. Tuttavia scegliere terne di pesi proporzionali non è l'unica maniera esistente per ottenere sempre le stesse curve proiettate.

Si può scegliere infatti una particolare funzione  $t(\tau)$  tale che  $t = \frac{\tau}{(1-\rho)\tau + \rho}$  con  $\rho \neq 0$  e  $\rho \neq 1$  così che  $Q(\tau) = P[t(\tau)]$ . Si possono quindi prendere in esame due triplette di pesi apparentemente differenti tra loro come  $(\rho^2 w_0; \rho w_1; w_2)$  e  $(w_0; w_1; w_2)$  e notare che le due triplette fanno ottenere la stessa curva senza bisogno di aggiungere costanti qualsiasi ma riparametrizzando avvalendosi unicamente di una **funzione di trasformazione**  $t = t(\tau)$ .

Per esempio si può scegliere anche una terna standard con  $\rho = \sqrt{\frac{w_2}{w_0}}$  così da ottenere:

$$(\rho^2 w_0; \rho w_1; w_2) \rightarrow (w_2; \sqrt{\frac{w_2}{w_0}} w_1; w_2)$$

la cui tripletta, divisa per il valore di  $w_2$ , diventa pari a  $(1; h; 1)$  dove  $h$  è un numero reale e positivo. Il tipo di conica che si ottiene dalla proiezione dipende allora unicamente dal valore di  $h$  (infatti quando  $h=1$  si ottiene esattamente la curva di Bèzier di partenza). Se  $h$  si trova tra 0 e 1 è facile ricavare degli archi di ellisse, con  $h > 1$  si ottengono solo archi di iperbole.

**Significato geometrico di h.** A partire dalla tripletta dei vertici del poligono di controllo della curva di Bèzier si può ottenere un parallelogramma. La curva di Bèzier inscritta in questo parallelogramma (che coincide in parte con il suo involucro convesso) taglia la sua diagonale maggiore in un punto indicato come  $P(\frac{1}{2})$  in questa maniera il **rapporto semplice** con il centro del parallelogramma risulta facile da calcolarsi, anche per quando riguarda le curve razionali.

$$\left( \frac{P_0 + P_2}{2}; P_1; P(\frac{1}{2}) \right) = -w_1 = -h \quad \text{con} \quad (A, B, C) = \frac{AC}{BC}$$

Se i pesi sono normalizzati non si ottiene mai  $-w_1$ , ma solo  $-h$ . Il tutto dipende dal valore dell'opposto del rapporto semplice tra i 3 vertici del poligono di controllo della curva di Bèzier di partenza (calcolo che torna utile in special modo con le circonferenze).

## 7.2.2 Archi di circonferenza

Per ottenere una circonferenza corretta si deve disporre di tre punti tra loro non allineati. In questo caso devono essere anche equidistanti. Purtroppo non si sa a priori quale valore di  $h$  darà luogo ad una circonferenza né se ce ne saranno più di uno alla volta, così si prova con  $h = \cos \alpha$ . Si suppone quindi di aver a che fare con una circonferenza nata da un'arco dato a sua volta dai tre punti equidistanti e non allineati del poligono di controllo di una curva di Bèzier.

Le coordinate dei punti sono  $A = (\cos \alpha, 0)$ ;  $B = (1/\cos \alpha, 0)$ ;  $C = (1, 0)$  dal momento che  $OP_2 = OB \cos \alpha$ . Il rapporto semplice è dato allora dalla seguente equazione:

$$(ABC) = \frac{AC}{BC} \rightarrow \frac{(1 - \cos \alpha)}{1 - \frac{1}{\cos \alpha}} = \frac{1 - \cos \alpha}{\cos \alpha - 1} = \frac{\cos \alpha}{-1} = -\cos \alpha = -h \quad \text{ovvero} \quad h = \cos \alpha$$

Il rapporto semplice risulta essere invariante per affinità. Se  $h = \cos \alpha$  l'arco ottenuto è per forza quello di circonferenza. Solitamente una circonferenza viene costruita servendosi di quattro archi di circonferenza, ovvero effettuando un incollamento di curve di Bèzier ottenendo così una curva spline. Con lo stesso poligono di controllo si può creare qualsiasi arco, salvo per il problema del controllo locale.

## 7.3 Curve spline di Bèzier razionali

Le condizioni di incollamento che devono sussistere tra le curve di Bèzier che si incollano tra loro per ottenere delle curve spline tengono conto, in questo frangente, anche dei pesi. Si porta in esempio il comportamento negli estremi di una curva di Bèzier razionale di grado 2 con i pesi normalizzati.

$$\begin{aligned} \dot{P}(0) &= \frac{2w_1}{w_0} \Delta^1(\underline{P}_0) = 2h \Delta(\underline{P}_0) \\ \dot{P}(1) &= \frac{2w_2}{w_1} \Delta^1(\underline{P}_1) = 2h \Delta(\underline{P}_1) \end{aligned}$$

La relazione che deve sussistere è la medesima che deve esistere nell'incollamento delle normali curve di Bèzier non razionali.

**Curve razionali di grado  $k$ .** Sono date da:

$$\underline{P}(t) = \sum_{i=0}^k \frac{B_i^k(t) w_i}{D_k(t)} \underline{P}_i \quad \text{con} \quad (w_0; \dots; w_k) \quad \text{e} \quad D_k(t) = \sum_{i=0}^k w_i B_i^k(t)$$

La terna (o comunque l'insieme) di pesi è difficile da normalizzare visto che non è detto che sia davvero una terna.

I vettori tangenti sono dati da:

$$\dot{P}(0) = \frac{k w_1}{w_0} \Delta^1(P_0)$$

$$\dot{P}(1) = \frac{k w_k}{w_{k-1}} \Delta^1(P_{k-1})$$

Solitamente le curve razionali di Bèzier sono flessibili ma non abbastanza da risolvere tutti i tipici problemi delle curve di Bèzier: si utilizzano quindi le **curve NURBS** (che altro non sono se non **curve spline razionali di Bèzier**). Anche per le curve razionali di Bèzier esiste un'algoritmo di De Casteljaou per la loro costruzione: funziona esattamente come l'algoritmo classico di De Casteljaou salvo per il passaggio induttivo che deve sempre tenere conto anche dei pesi:

$$P_i^r(t) = (1-t) \left( \frac{w_i^{r-1}(t)}{w_i^r(t)} \right) P_{i-1}^{r-1}(t) + t \left( \frac{w_{i+1}^{r-1}(t)}{w_i^r(t)} \right) P_{i+1}^{r-1}(t)$$

$$w_i^r(t) = (1-t) w_i^{r-1}(t) + t w_{i+1}^{r-1}(t)$$

## 7.4 Superfici razionali di Bèzier

Si ricorda la forma delle tradizionali superfici di Bèzier:

$$P(u, v) = \sum_{i=0}^h \sum_{j=0}^k B_i^h(u) B_j^k(v) P_{i,j}$$

Nel caso delle curve razionali di Bèzier (e quindi anche delle superfici razionali di Bèzier) ovviamente ad ogni famiglia di punti viene associata un'intera *famiglia di pesi*. Sul quadrato unitario si definisce una superficie razionale di Bèzier come segue:

$$P(u, v) = \sum_{i=0}^h \sum_{j=0}^k \frac{w_{ij} B_i^h(u) B_j^k(v)}{\sum_{i=0}^h \sum_{j=0}^k w_{ij} B_i^h(u) B_j^k(v)} P_{ij}$$

dove il grosso denominatore è riconducibile a  $D_{h,k}(u, v)$ .

Si possono costruire delle superfici razionali di Bèzier che sono a loro volta anche fogli di rotazione. Basta incollare tra loro opportunamente quattro distinte porzioni di superfici. I quarti saranno a loro volta dati da tante curve di Bèzier quante ne bastano per delimitare gli archi di circonferenza. Si costruisce così una griglia in maniera tale che le triplette risultino essere terne di punti di un triangolo isoscele.

---

## Appunti

sulle curve e superfici razionali



# Capitolo 8

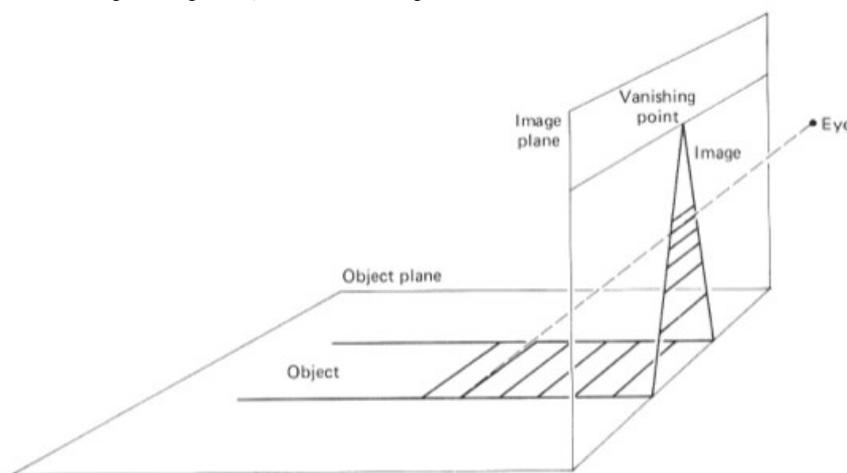
## Geometria Proiettiva

### 8.1 Introduzione

La *geometria proiettiva* descrive il problema di dover spiegare al computer come lavorare avvalendosi della **prospettiva**. Si immagini una situazione in cui vi è una *lastra di vetro* appoggiata perpendicolarmente su di un piano (con il quale traccia la cosiddetta **linea di terra**): tale lastra simula in un certo senso la **retina** di un'occhio umano e viene chiamata **linea dell'orizzonte**. Se si appoggia un qualsiasi oggetto (anche tridimensionale) sul piano e lo si guarda attraverso la lastra di vetro, l'immagine "proiettata" sulla lastra sarà differente dalla reale forma dell'oggetto, tuttavia il nostro cervello computa questa informazione in maniera disinvolta rendendosi comunque conto della natura dell'oggetto osservato (il computer invece no). Se si congiungono con delle rette tutti i vertici dell'oggetto ed il punto dal quale avviene l'osservazione, tali rette incontreranno anche la lastra di vetro disegnando su di essa la **proiezione prospettica** dell'oggetto in esame.

Per rappresentare certi oggetti è comunque necessario tenere conto che esistono dei *punti "inventati"* che nella realtà non sono visibili (si pensi per esempio al punto di incontro delle rette di cui si è accennato poco prima: nella realtà le rette parallele non si incontrano mai). Ovviamente la rappresentazione di oggetti tridimensionali (e di oggetti che non condividono nessun lato con la linea di terra) aumenta in difficoltà e complessità rispetto alla rappresentazione di semplici oggetti 2D.

Possono esistere dei punti nello spazio prospettico che non provengono dal disegno (o oggetto) sul piano. La proiezione intesa come tradizionale avviene su di un piano affine euclideo all'interno del quale però, sussiste il parallelismo.



**Punto improprio.** Si identifica in un punto improprio la direzione comune di un fascio di rette parallele (detto, per l'appunto, fascio improprio). Corrisponde al *punto all'infinito* posto nello spazio proiettivo, che per sua natura costituisce l'unico punto in cui è possibile l'incontro di rette tra di loro parallele.

Tali punti non hanno coordinate salvo che all'interno del piano proiettivo reale ( $P^2$ ) ed ogni punto di tale piano è individuato da una terna di valori di coordinata. La terna (0,0,0) non rappresenta, nel piano proiettivo, nessun punto valido.

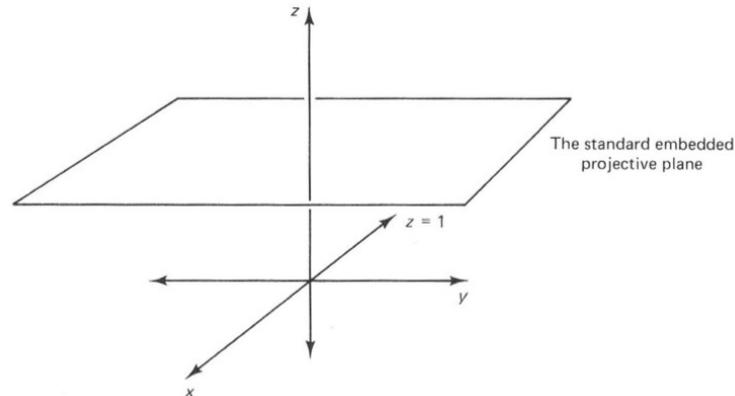
Al contrario, i **punti propri** sono da considerarsi tutti i punti della geometria tradizionale

che non risultano essere punti impropri.

### 8.1.1 Il piano prospettico

Sinora ci si è concentrati solamente sulla prospettiva planare o bidimensionale; in questo tipo di prospettiva l'oggetto ed i piani dell'immagine non dovevano essere forzatamente perpendicolari, tant'è che gli angoli tra i diversi piani risultavano essere arbitrari. Solitamente si individua in questa caratteristica l'introduzione alla prospettiva solida o degli oggetti tridimensionali.

Si sceglie come piano standard per la proiezione il **piano affine euclideo  $z=1$**  ( $U=1$ ) all'interno dello spazio affine euclideo di coordinate  $xyz$ .



Si considera il piano prospettico ma si lavora in tutto lo spazio affine euclideo, tant'è che si considerano tutte le rette passanti per l'origine del sistema di riferimento. I punti del piano proiettivo non possono avere tutte e tre le coordinate uguali a zero.

$$\tilde{P} \equiv (X, Y, U) \neq 0 \quad \text{con } U \neq 0$$

Preso quindi in considerazione un punto dello spazio  $\tilde{P} \equiv (\bar{X}, \bar{Y}, 0) \neq 0$  si può individuare una retta ed il fascio di rette associato ad essa che non intersecano il piano  $U=1$ . Tutti i punti del tipo  $(\rho X, \rho Y, \rho U)$  individuano sempre la stessa medesima retta anche al variare del parametro  $\rho$ . I punti in questione sono detti **punti impropri** ed ad essi corrisponde un'intera famiglia di punti a meno di un fattore di proporzionalità.

$$\rho \neq 0 \quad (X, Y, U) \rightarrow (\rho X, \rho Y, \rho U) \quad \text{come per esempio } (1, 2, 4) \rightarrow (2, 4, 8)$$

I punti impropri, poiché giacciono sul piano proiettivo, hanno sempre la terza coordinata diversa da zero. Un *punto proprio* di coordinate  $(x, y)$  si traduce in un punto improprio di coordinate  $(X, Y, 1)$  dove  $x \rightarrow X$  e  $y \rightarrow Y$ .

*Esempio.* Si prendano due punti  $A$  e  $B$  e la retta  $r$  che passa per questi due punti. La direzione della retta  $r$  è data dal vettore  $\underline{v}$ . Si scriva l'equazione della retta in forma cartesiana ed in forma parametrica.

$$\underline{v} = B - A = \begin{bmatrix} x_1 - x_0 \\ y_1 - y_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} \quad \text{con } A \equiv (x_0, y_0), B \equiv (x_1, y_1)$$

L'equazione della retta in forma parametrica e cartesiana sono date da:

$$\begin{aligned} x &= x_0 - \alpha t & e & \quad r \rightarrow ax + by + c = 0 \\ y &= y_0 - \beta t \end{aligned}$$

A partire dalla forma parametrica della retta si ricava il parametro  $t$ :

$$t = \frac{x - x_0}{\alpha} = \frac{y - y_0}{\beta} \quad \beta(x - x_0) = \alpha(y - y_0) \quad \beta x - \alpha y - \beta x_0 + \alpha y_0 = 0$$

A questo punto è possibile calcolare i punti impropri della retta, poiché  $x = X/U$  e  $y = Y/U$  con  $U$  diverso da zero. Il relativo punto proiettivo<sup>21</sup> è dato dalla terna di valori:

$$(\alpha, \beta, 0) \quad \text{dal momento che} \quad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}$$

Se si cerca di determinare una retta parallela a quella appena selezionata si capisce che i punti impropri saranno sempre i medesimi a meno di un certo e dato fattore di proporzionalità, il tutto dovuto al fatto che il vettore direzione risulta essere un multiplo del vettore direzione della prima retta.

Nel piano affine una retta è determinata dal passaggio obbligato per almeno due punti dati. Se i due punti in questione sono entrambi punti impropri, si parla di una retta particolare detta **linea dell'orizzonte**.

Esempio. Dati i punti  $A \equiv (1, 2, 1)$  e  $B \equiv (-3, -1, 0)$  la retta affine che li collega passa ovviamente per entrambi i punti ed il suo vettore direzione è dato da  $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} -3 \\ -1 \end{bmatrix}$ .

Dal punto di vista affine la rappresentazione parametrica di una retta serve ad associare ad essa un certo sistema di riferimento. La retta in forma parametrica viene espressa anche come  $P - P_0 = t\mathbf{v}$ . Siano  $A \equiv (a, b, c)$  e  $B \equiv (h, k, l)$  due suoi punti. Ogni qualsivoglia punto della retta sarà quindi dato da:

$$P = \lambda \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} + \mu \begin{bmatrix} h \\ k \\ l \end{bmatrix}$$

In pratica le tre coordinate del piano si proiettano sulle coordinate della retta.

Esempio. Dati due punti impropri  $A \equiv (1, 0, 1)$  e  $B \equiv (2, -2, 1)$  si calcola la retta che congiunge i due punti.

<sup>21</sup> **Punto proiettivo.** Si tratta di un punto dello spazio/piano proiettivo. Si indicano con coordinate espresse nella forma  $(x_{00}, y_{00}, z_{00})$  e giacciono tutti sugli assi del piano proiettivo. La loro terza coordinata risulta essere sempre pari a zero.

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \parallel \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix} \quad \det \begin{bmatrix} x-1 & 2 \\ y & -2 \end{bmatrix} = 0$$

La retta in forma cartesiana sarà data allora dall'equazione:

$$-2(x-1) - y = 0 \rightarrow y = -2x + 2 \quad 2x + y - 2 = 0 \rightarrow 2X + Y - 2U = 0$$

Allora:

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ U \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \mu \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} X = \lambda + 2\mu \\ Y = -2\mu \\ U = \lambda + \mu \end{array}$$

$\lambda$  e  $\mu$  sono coordinate proiettive. Si può ottenere la stessa retta ricavata ora calcolandola a partire da una retta affine data.

Si prendono ora due punti impropri come  $P \equiv (1, 2, 1)$  e  $Q \equiv (-2, 3, 1)$  e si vuole calcolare l'equazione della retta comprensiva, tra tutti i suoi punti, anche del punto proprio.

$$\lambda \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} + \mu \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda - 2\mu \\ 2\lambda + 3\mu \\ \lambda + \mu \end{bmatrix}$$

Se si pone la condizione  $\lambda + \mu = 0 \rightarrow \mu = -\lambda$  è possibile isolare il punto proprio:

$$\begin{bmatrix} 3\lambda \\ -\lambda \\ 0 \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{dove le coordinate del punto sono } (3, -1, 0).$$

Risulta facile verificare che, dall'equazione della retta, per ricavare rispettivamente i punti P e Q basta porre  $\lambda = 2, \mu = 0$  e  $\lambda = 0, \mu = 2$ .

Di solito un punto improprio possiede la seconda coordinata pari a zero solo se si sfrutta il sistema di riferimento locale del piano  $U=1$ , quindi solo se la retta giace interamente sul piano proiettivo. I punti proiettivi devono avere per forza la terza coordinata pari a zero.

## 8.2 Passaggio da piano affine a piano proiettivo

Una retta, nel piano affine, viene espressa in forma cartesiana come segue:  $x - 2y + 2 = 0$  mentre nel piano proiettivo la stessa retta assume la forma  $X - 2Y + 2U = 0$ .

Si prendono due punti qualsiasi sul piano proiettivo  $H \equiv (-2, 2, 1), T \equiv (2, 2, 1)$ . Si immagini allora di fare riferimento al sistema di riferimento ortogonale locale del piano proiettivo e si tracci una retta  $r$  obliqua che passa per il punto T. Tale retta incontra l'asse delle  $y$  nel punto  $P \equiv (0, 1, 1)$  e, se prolungata, incontra l'asse delle  $x$  nel punto  $R \equiv (-2, 0, 1)$ .

Si calcola quindi la combinazione lineare di questi due punti sul piano proiettivo:

$$\lambda \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \mu \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2\lambda \\ \mu \\ \lambda + \mu \end{bmatrix} \quad \text{con } (\lambda, \mu) \neq (0, 0)$$

Si considera ora quel segmento che congiunge i punti H e P nel piano proiettivo (si può considerare il punto P come la retta stessa che passa per esso, calcolata poc'anzi):

$$\alpha \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} -2\lambda \\ \mu \\ \lambda + \mu \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2\alpha - 2\beta\lambda \\ 2\alpha + \beta\mu \\ \alpha + (\lambda + \mu)\beta \end{bmatrix}$$

Il generico punto sull'asse delle x del piano proiettivo risulta essere  $\begin{bmatrix} \lambda' \\ 0 \\ \mu' \end{bmatrix}$  tuttavia, per

trovare il punto che sta esattamente sull'asse delle x partendo dal punto generico con la seconda coordinata pari a zero, significa proseguire nei calcoli come segue; infatti risulta dal secondo elemento del vettore che  $2\alpha + \beta\mu = 0$  allora  $\alpha = \mu, \beta = -2$  e sostituendo i valori ottenuti nel vettore appena calcolato si ottiene:

$$\begin{bmatrix} -2\mu + 4\lambda \\ 0 \\ \mu - 2\lambda - 2\mu \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda' \\ 0 \\ \mu' \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \lambda' \\ \mu' \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}}_A \begin{bmatrix} \lambda \\ \mu \end{bmatrix} \quad \text{con} \quad \begin{matrix} w: P^1 \rightarrow P^1 \\ \det(A) \neq 0, \rho \neq 0 \end{matrix}$$

Dove A è una matrice 2x2 che descrive la **proiettività tra due rette**, nel caso in esame delle rette HP e TP/PR. Grazie a questa matrice sarà possibile studiare come qualsiasi punto si proietta sull'asse delle x.

*Esempio. Si calcola la proiezione del punto  $P \equiv (0, 1, 1)$  sull'asse delle x.*

$$w(P) = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \end{bmatrix} \quad \text{allora } P' \text{ avrà coordinate pari a } P' \equiv (2, 0, 1)$$

*Anche se il risultato corretto sarebbe  $P' \equiv (-2, 0, -1)$  si possono ricavare le corrette coordinate affini moltiplicandole per un valore costante pari a -1  $\rightarrow (2, 0)$ .*

*Si calcola ora la proiezione del punto  $R \equiv (-2, 0, 1)$  che, trovandosi già sull'asse delle x, dovrebbe rimanere fermo al suo posto.*

$$w(R) = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \end{bmatrix} \quad \text{Allora } R \text{ avrà coordinate pari a } R \equiv (-2, 0, 1)$$

*Anche se il risultato corretto sarebbe  $R \equiv (4, 0, -2)$  è possibile normalizzare tutte e tre le coordinate dividendole per un fattore comune di proporzionalità pari a -2. Si nota che si ottengono le esatte coordinate del punto R di partenza.*

*Individuato il punto  $T \equiv (2, 2, 1)$  sul piano affine si calcola il suo punto proiettivo.*

$$\begin{bmatrix} -2\lambda \\ \mu \\ \lambda + \mu \end{bmatrix} = \rho \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{matrix} -2\lambda = 2\rho \\ \mu = 2\rho \\ \lambda + \mu = \rho \end{matrix} \quad \text{con} \quad \rho = \frac{\mu}{2} \rightarrow \mu = -2\lambda$$

$$w(T) = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 0 \end{bmatrix}$$

*Dove le coordinate del punto proiettivo a partire da T risultano essere  $T' \equiv (1, 0, 0)$*

anche se il risultato corretto sarebbe  $T' \equiv (8,0,0)$  che, diviso per un comune fattore di proporzionalità, si riduce a quanto espresso poc'anzi. Si tratta del punto  $X_{00}$  dal momento che la terza coordinata è pari a zero.  
Si cerca ora il punto improprio  $P_{00}$ :

$$\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ -1 \end{bmatrix}$$

calcolo che produce il punto  $(-6,0,1)$  opportunamente diviso per un fattore di proporzionalità pari a  $-1$ , che altro non è se non la proiezione del punto  $H$  sull'asse delle  $x$ .

In conclusione, la situazione appena espletata è quella di un piano che coincide con il piano proiettivo) sul quale giace una lastra di vetro rappresentata dalla retta  $r$  su cui si proiettano i punti.

**Proiettività su rette.** Ogni proiettività è descritta come

$$w: P^1 \rightarrow P^1 \text{ con } w \rightarrow \rho A(2 \times 2) \text{ dove } \det(A) \neq 0, \rho \neq 0$$

**Proiettività sui piani.** Vale quanto appena descritto per le proiettività tra rette.

$$w: P^2 \rightarrow P^2 \text{ con } w \rightarrow \rho A(3 \times 3) \text{ dove } \det(A) \neq 0, \rho \neq 0$$

### 8.2.1 Proiettività speciali $\rightarrow$ Prospettività

Per descrivere la proiettività tra piani si parte sempre da quattro punti di partenza in posizioni generali quindi a tre a tre tra loro non allineati e dalla loro immagine.

$X_{00}$	$Y_{00}$	O	U
1	0	0	1
0	1	0	1
0	0	1	1

Dove  $X_{00}, Y_{00}$  sono punti propri, O è sempre il punto di origine del sistema di riferimento locale del piano proiettivo e U viene chiamato punto unitario (questi ultimi entrambi punti impropri). Se si dispone anche della loro immagine, si può agevolmente descrivere la loro proprietà di prospettiva, data dalla creazione di una matrice a più colonne.

La prima colonna si individua come segue:

$$\begin{bmatrix} \sigma a \dots \\ \sigma b \dots \\ \sigma c \dots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \text{ con } \sigma \neq 0$$

La seconda colonna invece si ricava in questa maniera:

$$\begin{bmatrix} \sigma a \tau d \dots \\ \sigma b \tau e \dots \\ \sigma c \tau f \dots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d \\ e \\ f \end{bmatrix} \quad \text{con } \tau \neq 0$$

A seguire la terza e quarta colonna, individuate come:

$$\begin{bmatrix} \sigma a \tau d \lambda g \dots \\ \sigma b \tau e \lambda h \dots \\ \sigma c \tau f \lambda k \dots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g \\ h \\ k \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} \sigma a \tau d \lambda g \rho m \\ \sigma b \tau e \lambda h \rho n \\ \sigma c \tau f \lambda k \rho p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m \\ n \\ p \end{bmatrix} \quad \text{con } \lambda \neq 0, \rho \neq 0$$

Fino ad ottenere un sistema, e quindi una matrice A, di questo tipo:

$$\begin{aligned} \sigma a + \tau d + \lambda g - \rho m &= 0 & \begin{bmatrix} a & d & g & -m \\ b & e & h & -n \\ c & f & k & -p \end{bmatrix} \\ \sigma b + \tau e + \lambda h - \rho n &= 0 \\ \sigma c + \tau f + \lambda k - \rho p &= 0 \end{aligned}$$

Tale matrice sarà la matrice di proiettività associata al sistema. Sapendo che i punti sono tra loro a tre a tre non allineati la matrice sarà a sua volta massima, così da essere intesa a tutti gli effetti come un'applicazione lineare  $\mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ .

La proiettività non conserva i rapporti semplici, ma conserva i birapporti.

**Birapporti.** Si definisce birapporto una proprietà associata ai quattro punti di una retta, definita anche se uno dei quattro punti è all'infinito. Qualsiasi trasformazione proiettiva non modifica un birapporto. Il birapporto è simile al parallelo concetto di *distanza* tra punti qualsiasi della geometria euclidea.

Si pensi a quattro punti allineati, quindi appartenenti alla stessa retta, ed ad altri quattro punti appartenenti ad un'altra retta  $\rightarrow (A : B : C : D) \in r \rightarrow (A' : B' : C' : D') \in r'$

I birapporti esprimono la condizione  $\frac{ABC}{ABD} = \frac{A'B'C'}{A'B'D'} \in \mathbb{R}$  ed il rapporto viene espresso solitamente attraverso un valore reale.

La proprietà del birapporto è utilizzata (un tempo maggiormente rispetto ad oggi) per ricostruire la scena reale a partire da uno scatto fotografico.

Se i punti impropri finiscono in altri punti impropri, la proiettività diventa un'*affinità*.

## 8.3 Geometria proiettiva nello spazio

Poichè non si può visualizzare correttamente un piano affine in tre dimensioni, si passa allora ad una **chiusura proiettiva**  $\rightarrow E^3 \subset P(E^3)$ . Si avrà a che fare con un piano fatto di punti impropri che raccoglie ed accoglie in se stesso **rette improprie**. Si ricorda che ogni piano dello spazio affine generalmente possiede una retta impropria (che non è altro che una retta che congiunge tutti i punti impropri, detta linea dell'orizzonte; è una retta che tende all'infinito).

Nello **spazio proiettivo** ogni **punto** è dato da quattro coordinate (si ricorda che il punto con tutte e quattro le coordinate pari a zero non esiste). I punti impropri hanno sempre la coordinata U diversa da 0.

$$P \equiv (x, y, z, U) \quad \text{con} \quad \begin{aligned} x &= X/U \\ y &= Y/U \\ z &= Z/U \end{aligned} \quad \text{dove } U \neq 0$$

Si espleta ora l'equazione della *chiusura proiettiva*:

$$ax+by+cz+d=0 \rightarrow aX+bY+cZ+U=0 \text{ con } U \neq 0$$

mentre la *retta impropria* del piano è data dalla seguente equazione:

$$\begin{aligned} aX+bY+cZ &= 0 \\ U &= 0 \end{aligned}$$

Un piano del tipo  $ax+by+cz+d=0$  ed un altro piano del tipo  $\rho ax+\rho by+\rho cz+\tilde{d}=0$  sono paralleli tra loro a meno di un fattore di proporzionalità comune, così da individuare un fascio di piani tra loro paralleli, quindi un *fascio improprio di piani*. Un fascio di questo tipo taglia una sola retta impropria, individuandola.

*Esempio.* Dato un punto  $P_{00} \equiv (\alpha, \beta, \gamma, 0)$  si sa che corrisponde nello spazio affine di partenza al vettore  $\underline{v} = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix}$  con  $P_0 \equiv (x_0, y_0, z_0)$ . La retta affine che passa, tra le altre cose, per il punto  $P_0$  è la seguente:

$$\begin{aligned} x &= x_0 + \alpha t \\ y &= y_0 + \beta t \\ z &= z_0 + \gamma t \end{aligned}$$

mentre la corrispondente retta proiettiva risulta essere:

$$P \rightarrow \lambda P_{00} + \mu P_0 \rightarrow \lambda \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ 0 \end{bmatrix} + \mu \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda \alpha + \mu x_0 \\ \lambda \beta + \mu y_0 \\ \lambda \gamma + \mu z_0 \\ \mu \end{bmatrix}$$

Se  $\mu=0, \lambda \neq 0$  allora rimane solo  $\lambda P_{00}$ .

Si ricorda che due punti impropri determinano una retta impropria fatta solo di punti impropri.

Una retta può essere espressa anche dall'intersezione di due piani, così come segue:

$$r \rightarrow \begin{aligned} 2x - y + 3z - 4 &= 0 \\ -x + 2y + z - 1 &= 0 \end{aligned}$$

Tali piani sono espressi in forma cartesiana nello spazio affine. La medesima retta possiede anche una versione alternativa espressa in maniera proiettiva:

$$r \rightarrow \begin{aligned} 2X - Y + 3Z - 4U &= 0 \\ -X + 2Y + Z - U &= 0 \end{aligned}$$

Si può ora trovare il punto improprio di questa retta.

$$\begin{aligned} 2X - Y + 3Z &= 0 \\ -X + 2Y + Z &= 0 \\ U &= 0 \end{aligned}$$

Si isola quindi  $Z = X - 2Y$  che sostituita nelle altre equazioni da luogo a:

$$2X - Y + 3(X - 2Y) = 0 \rightarrow 5X - 7Y = 0 \rightarrow Y = \frac{5}{7}X \quad Z = X - 2\left(\frac{5}{7}X\right) = -\frac{3}{7}X$$

Il punto improprio risulta quindi essere  $P_{00} \equiv (X, \frac{5}{7}X, -\frac{3}{7}X, 0)$  dove X dev'essere per forza diverso da zero altrimenti si otterrebbe la quaterna di zeri che indica un punto non valido. Si può verificare anche se esiste un vettore valido che identifica la direzione della retta individuata dai due piani intersecati  $\rightarrow v \parallel (v_1 \wedge v_2), v = \begin{bmatrix} 7 \\ 5 \\ -3 \end{bmatrix}$ . Per individuare i valori dei vettori  $v_1$  e  $v_2$  si possono sfruttare i coefficienti delle due equazioni dei piani messe a sistema.

$$\begin{bmatrix} i & j & k \\ 2 & -1 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix} = (-1-6)i - (2+3)j + 3k = \tilde{v} \quad \text{con} \quad \tilde{v} = \begin{bmatrix} -7 \\ -5 \\ 3 \end{bmatrix}$$

dove il vettore individuato, se moltiplicato per l'opportuno fattore moltiplicativo, risulta essere l'opposto del vettore indicato poc'anzi. Risulta comunque corretto dal momento che la direzione del vettore ricavato è comunque la stessa di quello indicato, dal momento che sono l'uno il multiplo dell'altro.

Si dice che nello spazio proiettivo i piani individuano una **chiusura proiettiva**.

### 8.3.1 Posizione degli enti nello spazio

Se si dispone di tre piani proiettivi potrebbe darsi che questi non si intersechino mai anche se si trovano nello spazio affine. Se risulta che due di questi piani coincidano, il punto improprio di uno di essi giace sull'altro piano.

Il processo di determinazione della posizione degli enti nello spazio proiettivo risulta essere più facile rispetto al caso affine dal momento che non esiste affatto il concetto di parallelismo.

Si suppone di avere a che fare con una coppia di piani e con la matrice associata ai loro coefficienti:

$$\begin{aligned} a_1 X + a_2 Y + a_3 Z + a_4 U & \\ b_1 X + b_2 Y + b_3 Z + b_4 U & \end{aligned} \quad \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \end{bmatrix}$$

Se la matrice dei coefficienti ha:

- rango = 1  $\rightarrow$  i due piani coincidono e sono lo stesso piano;
- rango = 2  $\rightarrow$  i due piani si incontrano e si tagliano lungo una retta, individuandola.

Se si aggiunge un terzo piano, se la matrice dei coefficienti ha:

- rango = 2  $\rightarrow$  la retta che individuano i primi due piani nell'atto di intersecarsi giace interamente sul terzo piano.

- rango = 3 → il terzo piano non interseca gli altri due.

Se si aggiunge un'ulteriore piano così da individuare una retta per ogni intersezione tra i piani a due a due, se la matrice dei coefficienti ha:

- rango = 2 → le due rette individuate sono la stessa retta, coincidendo.
- rango = 3 → uno dei piani che individua una delle due rette interseca l'altra retta individuando un solo punto in comune per le due rette (che si può calcolare).
- rango = 4 → le due rette non si incontrano mai e non hanno nulla in comune, quindi il sistema non ha soluzioni.

### 8.3.2 Proiettività

Come già accennato, nel piano la proiettività era espressa come:

$$w: P^2 \rightarrow P^2 \quad w \rightarrow A(3 \times 3) \quad \det(A) \neq 0 \quad \text{con} \quad \rho \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \quad \text{dove} \quad \rho \neq 0$$

Nello spazio invece funziona che:

$$w: P^3 \rightarrow P^3 \quad w \rightarrow A(4 \times 4) \quad \det(A) \neq 0 \quad \text{con} \quad \rho \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ U' \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ U \end{bmatrix} \quad \text{dove} \quad \rho \neq 0$$

Servono innanzitutto quattro punti tra loro non allineati e cinque punti che però tra loro non siano complanari.

X <sub>00</sub>	Y <sub>00</sub>	Z <sub>00</sub>	O	U
1	0	0	0	1
0	1	0	0	1
0	0	1	0	1
0	0	0	1	1

Anche in questo caso per descrivere una proiettività è necessario definire una matrice A, dove ogni punto è espresso come P = (a,b,c,d):

$$\begin{bmatrix} \sigma a & \tau a' & \eta a'' & \theta a''' \\ \sigma b & \tau b' & \eta b'' & \theta b''' \\ \sigma c & \tau c' & \eta c'' & \theta c''' \\ \sigma d & \tau d' & \eta d'' & \theta d''' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \epsilon \begin{bmatrix} h \\ k \\ l \\ m \end{bmatrix} \rightarrow \rho A$$

dove i vari coefficienti risultano essere fattori di proporzionalità.

Anche nel caso dello spazio, le **affinità** spaziali sono proiettività dove i punti propri non finiscono mai in punti impropri. La matrice A definisce a tutti gli effetti un'affinità. Il compito delle affinità è quello di semplificare i calcoli nelle aree di interesse, a patto di scegliere quelle opportune.

Si definisce **proiettività univoca** del quadrilatero unitario quella proiettività che sposta

ogni vertice del quadrilatero nel corrispondente vertice del tronco di cono. È tuttavia più interessante la sua **trasformazione inversa**:

$$w \rightarrow A \quad w^{-1} \rightarrow A^{-1} \quad \text{dove} \quad A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \tilde{A}$$

## 8.4 Proiezione di oggetti tridimensionali

Si pensi di voler proiettare sul piano proiettivo un oggetto tridimensionale. Si sceglie innanzitutto un sistema di riferimento rispetto al quale posizionare l'oggetto; ovviamente, anche il piano proiettivo possiede un suo sistema di riferimento locale che non è assolutamente detto sia allineato con il sistema dell'oggetto da proiettare.

Innanzitutto si studia come individuare il piano proiettivo. Si parte da un vertice casuale dell'oggetto tridimensionale, detto punto P, e dal versore normale del piano proiettivo  $\rightarrow$

$$P \equiv (X_0, Y_0, Z_0, 1) \quad \text{punto proprio,} \quad \underline{n} = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} \quad \text{vettore normale.}$$

$$\begin{aligned} \pi \rightarrow (x-x_0)\alpha + (y-y_0)\beta + (z-z_0)\gamma &= 0 \\ \alpha x + \beta y + \gamma z - (\alpha x_0 + \beta y_0 + \gamma z_0) &= U = 0 \\ \alpha x + \beta y + \gamma z + \delta &= 0 \end{aligned}$$

Si vuole ora determinare la retta che congiunge il punto di vertice dell'oggetto con il punto di vista E, quindi la retta/segmento PE, passante per il piano proiettivo. Il punto E è dato da  $E \equiv (lx, ly, lz, lu)$ , mentre il punto P si proietta nel punto proprio  $P' \equiv (\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, 1)$ .

$$\begin{aligned} \lambda \begin{bmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \\ \bar{z} \\ 1 \end{bmatrix} + \mu \begin{bmatrix} lx \\ ly \\ lz \\ lu \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} x = t e_x + \bar{x} \\ y = t e_y + \bar{y} \\ z = t e_z + \bar{z} \\ u = t e_u + 1 \end{bmatrix} \quad \text{dove} \quad t = \frac{\mu}{\lambda} \\ \alpha(t e_x + \bar{x}) + \beta(t e_y + \bar{y}) + \gamma(t e_z + \bar{z}) - \delta(t e_u + 1) &= 0 \\ t(\alpha e_x + \beta e_y + \gamma e_z + \delta e_u) + \alpha \bar{x} + \beta \bar{y} + \gamma \bar{z} - \delta &= 0 \quad \text{dove} \quad \alpha e_x + \beta e_y + \gamma e_z + \delta e_u = H \\ t &= \frac{-\alpha \bar{x} - \beta \bar{y} - \gamma \bar{z} - \delta}{H} \end{aligned}$$

Allora si ottiene:

$$\begin{aligned} x' &= (-\alpha \bar{x} - \beta \bar{y} - \gamma \bar{z} + \delta) e_x + \bar{x} H \\ y' &= (-\alpha \bar{x} - \beta \bar{y} - \gamma \bar{z} + \delta) e_y + \bar{y} H \\ z' &= (-\alpha \bar{x} - \beta \bar{y} - \gamma \bar{z} + \delta) e_z + \bar{z} H \\ U' &= (-\alpha \bar{x} - \beta \bar{y} - \gamma \bar{z} + \delta) e_u + H \end{aligned} \quad \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ U' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta e_y - \gamma e_z - \delta e_u - \beta e_x - \gamma e_x \delta e_x \\ -\alpha e_z - \beta e_z \alpha e_x + \beta e_y - \delta e_u \delta e_z \\ -\alpha e_y \alpha e_x + \gamma e_z - \delta e_u - \gamma e_y \delta e_y \\ -\alpha e_u - \beta e_u - \gamma e_u \alpha e_x + \beta e_y + \gamma e_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \\ \bar{z} \\ 1 \end{bmatrix}$$

La matrice così determinata ha determinante diverso da zero. In pratica si è preso un punto P appartenente all'oggetto e lo si è trasformato per ottenere la sua proiezione P' sul piano proiettivo.

Si possono trasformare i punti del piano proiettivo nei punti di un'ulteriore piano che si trova al di fuori dello spazio proiettivo: bisogna quindi scegliere con attenzione e cura

alcuni versori  $\underline{w}_1 = \begin{bmatrix} \alpha' \\ \beta' \\ \gamma' \end{bmatrix}, \underline{w}_2 = \begin{bmatrix} \alpha'' \\ \beta'' \\ \gamma'' \end{bmatrix}$  sul piano proiettivo per istituire un certo sistema di riferimento opportuno in esso. Tali vettori assieme al versore normale dovranno costituire una terna di versori ortonormali. Si considera quindi la matrice di trasformazione:

$$\begin{bmatrix} \alpha' & \alpha'' & x_0 \\ \beta' & \beta'' & y_0 \\ \gamma' & \gamma'' & z_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A \\ B \\ C \\ D \end{bmatrix}$$

Tale matrice manda le coordinate del punto individuato sul piano proiettivo (si tratta di un punto proprio) nel secondo piano individuato al di fuori dello spazio. In verità avviene il procedimento contrario e non è possibile ottenere il viceversa in maniera precisa ed assoluta (tuttavia è fattibile se si approssima utilizzando l'**inversa sinistra** della matrice). Per avere un'inversa sinistra, si ricorda che la matrice deve avere rango massimo. Se esiste un'inversa sinistra  $A^+$  è possibile moltiplicarla per le coordinate del punto  $P'$  del piano proiettivo per ottenere il punto corrispondente individuato sul secondo piano proiettivo al di fuori dello spazio  $\rightarrow P'' = M_2 P'$ .

### 8.4.1 Ingrandimento/rimpicciolimento immagine

E' possibile effettuare ingrandimenti di un oggetto o di un'immagine con un utilizzo sapiente e proficuo di traslazioni e rotazioni. Si parla di sfruttare un'affinità, tuttavia la si vuole descrivere come se fosse una proiettività. Ogni fase dello spostamento è descritta da una ben specifica matrice che, sommata a tutte le altre, determina la modifica generale dell'immagine.

Xoo	Yoo	O	Q
$\alpha$	$o$	$(\frac{a+b}{2})\gamma$	$\rho b$
$o$	$\beta$	$(\frac{c+d}{2})\gamma$	$\rho d$
$o$	$o$	$\gamma$	$\rho$

con  $\alpha \neq 0, \beta \neq 0, \gamma \neq 0, \rho \neq 0$ . L'intenzione è quella di imporre che un dato punto finisca esattamente in una data posizione, il tutto determinando una certa matrice che descriverà lo spostamento.

$$\begin{aligned} h\alpha + \gamma\left(\frac{a+b}{2}\right) &= \gamma b \\ \beta k + \gamma\left(\frac{c+d}{2}\right) &= \gamma d \end{aligned} \quad \text{con } \rho = \gamma \quad \text{quindi} \quad \begin{aligned} 2h\alpha + (a-b)\gamma &= 0 \\ 2\beta k + (c-d)\gamma &= 0 \end{aligned} \quad \rightarrow \quad \begin{aligned} \alpha &= \left(\frac{b-a}{2h}\right)\gamma \\ \beta &= \left(\frac{c-d}{2k}\right)\gamma \end{aligned}$$

Così si può scrivere la matrice finale:

$$\begin{bmatrix} \left(\frac{b-a}{2h}\right) & 0 & \left(\frac{b-a}{2}\right) \\ 0 & \left(\frac{c-d}{2k}\right) & \left(\frac{c-d}{2}\right) \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = M_3$$

La trasformazione finale è riassumibile così  $\rightarrow P''' = M_3 M_2 M_1 P$ , detta anche **camera proiettiva**.

Dando uno sguardo d'insieme all'intero spazio, tutti i punti della retta che congiungono P a P' collassano in P'. Si tratta di una mappa di proiezione che utilizza una retta come controimmagine del punto da proiettare. Salvo il punto di vista E, questa trasformazione schiaccia tutto lo spazio sul piano proiettivo. Ha senso ricostruire uno spazio tridimensionale a partire da una proiezione ma risulta impossibile se si utilizza una sola camera. Ovviamente tutte le rilevazioni sono soggette ad errori, così va da sé che alcuni conti potrebbero non tornare.

## 8.5 Camera proiettiva

Quello della **camera proiettiva** è un formalismo dovuto agli studi di Hartley e Zimmerman. Si tratta di proiettare l'intero piano su di una retta (dal punto di vista affine) attraverso un punto H (punto di vista), dove la retta è solitamente intesa come l'asse delle x di un sistema di riferimento affine ed il punto P è un punto che appartiene al piano da proiettare. H e P si trovano sullo stesso asse (o segmento, o retta) per proiettare P in P' sull'asse delle x.

Si immagina che le coordinate del punto H siano  $H \equiv (-2, 2)$ , che le coordinate di un generico punto sul piano a cui appartiene P siano nella forma  $(X, Y, U)$  mentre le coordinate di un generico punto sull'asse delle x sia del tipo  $(x, u)$ . Ovviamente  $X \rightarrow x$  e  $U \rightarrow u$ .

Si calcola ora la retta che congiunge i punti H dello spazio e P del piano.

$$\lambda \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} + \mu \begin{bmatrix} X \\ Y \\ U \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2\lambda + \mu X \\ 2\lambda + \mu Y \\ \lambda + \mu U \end{bmatrix} \quad \text{con } (\lambda, \mu)$$

Si ha allora  $\mu = -2, \lambda = Y$  informazione ricavata dalla seconda equazione della matrice risultate,  $2\lambda + \mu Y = 0$ . In questa maniera ricavare P' è facile:

$$P' = \begin{bmatrix} -2Y - 2X \\ 0 \\ Y - 2U \end{bmatrix} \begin{matrix} x \\ =0 \\ y \end{matrix} \rightarrow \begin{bmatrix} -2 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \\ U \end{bmatrix} = \rho \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad \text{con } P \underline{X} = \rho \underline{x}, \rho \neq 0$$

Quella appena indicata è la matrice proiettiva di P che descrive la proiezione dei punti appartenenti al piano sulla retta delle x a partire dal punto di vista H. Tale matrice è detta anche **matrice della camera proiettiva**.

Esiste un punto del piano per cui la mappa/matrice della camera proiettiva non esiste, ed è quello per cui vale:

$$\begin{matrix} -2X - 2Y = 0 \\ Y - 2U = 0 \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} Y = 2U \\ X = -Y = -2U \end{matrix} \rightarrow (-2U, 2U, U) \rightarrow (-2, 2, 1)$$

Che non è altro che il punto  $H \equiv (-2, 2, 1)$ , associato al punto di vista. Per lui non vale nessuna regola di proiezione definita dalla precedente mappa o matrice (per ovvie ragioni geometriche). Il punto H in questione è detto **centro della camera proiettiva** poiché è il punto di partenza da cui si calcola l'intera proiezione; ovviamente tale punto non è compreso nella camera proiettiva.

Capita di non accorgersi se si proietta su una retta diversa da quella delle x (a patto che non passi per il punto H) ma poco importa perché si crea una corrispondenza biunivoca tra la retta delle x e qualsiasi altra retta. La cosa ha senso dal momento che dal punto di vista proiettivo non ha significato distinguere gli "schermi" sui quali si proietta l'immagine.

Stesso discorso per la **proiettività** di un punto dello spazio su di un piano, che avviene attraverso una matrice o mappa prestabilita (calcolata caso per caso), a patto che il piano non passi per il punto da proiettare:

$$A(3 \times 4) \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \\ U \end{bmatrix} = \rho \begin{bmatrix} x \\ y \\ u \end{bmatrix}$$

### 8.5.1 Camera finita

Il punto che funge da centro di una **camera proiettiva finita** è sempre un punto proprio. La matrice o mappa di una camera proiettiva finita ha determinante diverso da zero e rango dal valore pari a 3 (quindi le sue prime tre colonne sono tra loro linearmente indipendenti). Si prova ora a costruire la camera proiettiva finita nel caso in cui si abbia la possibilità di farlo.

**Pin-Hole.** Il punto C, centrale per la camera, corrisponde anche al **centro** del sistema di riferimento associato. Il **piano proiettivo** (o di proiezione) corrisponde allo "schermo" e ovviamente non può passare per il punto centrale C. L'asse delle z è da considerarsi come **asse focale** della camera, ovvero come distanza dello schermo dal centro della camera. Il **punto principale** della camera è il punto preciso in cui l'asse focale si interseca con il piano proiettivo. In ultimo, il **piano principale** è quel piano ideale che passa per il punto centrale e risulta essere sempre parallelo allo schermo.

Si prende ora in esame un punto P dello spazio diverso dal punto centrale C e si calcola la retta che congiunge i due punti e che attraversa il piano proiettivo:

$$\rho \begin{bmatrix} \bar{X} \\ \bar{Y} \\ \bar{Z} \\ \bar{U} \end{bmatrix} + \sigma \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \rho \bar{X} \\ \rho \bar{Y} \\ \rho \bar{Z} \\ \rho \bar{U} + \sigma \end{bmatrix}$$

dove  $C \equiv (0,0,0,1)$  e P è da considerarsi come un generico punto dello spazio. Allora:

$$\begin{aligned} \rho \bar{Z} - f(\rho \bar{U} + \sigma) &= 0 & \text{con} & \quad \sigma = \bar{Z} - f \bar{U} \\ \rho(\bar{Z} - f \bar{U}) - f \sigma &= 0 & & \quad \rho = f \end{aligned}$$

Si ottiene quindi  $(f \bar{X}, f \bar{Y}, f \bar{Z}, f \bar{U} - \bar{Z} - f \bar{U})$  dove le coordinate corrispondono, sul piano proiettivo, a  $f \bar{X} = x, f \bar{Y} = y, \bar{Z} = u$ . Il punto così individuato si trova per forza di

cosa sul piano proiettivo. La matrice M associata a questa proiezione è la seguente:

$$\begin{bmatrix} f & 0 & 0 & 0 \\ 0 & f & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \\ U \end{bmatrix} = \rho \begin{bmatrix} fX \\ fY \\ Z \end{bmatrix} = \rho \begin{bmatrix} x \\ y \\ u \end{bmatrix}$$

dove  $f$  corrisponde alla distanza focale, ovvero la distanza del centro della camera dal piano proiettivo.

Purtroppo non si ha sempre a che fare con un sistema di riferimento ortogonale e comodo come nel caso preso in esame, quindi conviene rilassare le aspettative. Il nuovo sistema di riferimento potrebbe infatti avere il centro corrispondente al punto principale (tipico delle macchine fotografiche). Ecco come si modifica la matrice M:

$$\begin{bmatrix} f & 0 & x_0 & 0 \\ 0 & f & y_0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

In questo caso la prima colonna della matrice restituisce le coordinate del punto proiettivo  $x_{00}$ , la seconda colonna quelle del punto  $y_{00}$ . In questo caso il centro C si proietta su un punto particolare ed  $x_0$  ed  $y_0$  sono le coordinate del punto principale.

Inoltre il sistema di riferimento potrebbe non essere ortogonale, così che vadano corrette anche la prima e seconda colonna della matrice M così come segue:

$$\begin{bmatrix} m_x f & s & x_0 & 0 \\ 0 & m_y f & y_0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Ora  $m_x$  ed  $m_y$  tengono conto del fatto che il reticolo della camera non sia perfettamente quadrato. Quest'ultima risulta essere, tra tutte, la matrice più generica che tiene conto di tutte le modifiche ed irregolarità che potrebbe presentare il sistema di riferimento della camera proiettiva. I modelli di camera più recenti comunque riportano  $m_x = m_y$  ed  $s = 0$ .

**Trasformazioni affini.** Sinora si sono considerati unicamente i **parametri interni** alla camera, tuttavia bisogna prendere in esame anche quelli **esterni**. Nella realtà, il sistema di riferimento è posto nel mondo ma il centro C della camera è isolato ed a sé stante. Per descrivere una situazione simile si fa largo uso delle trasformazioni affini.

Le coordinate di un generico punto dello spazio rispetto al sistema di riferimento preso in esame è esprimibile come:

$$X - C = \alpha \underline{w}_1 + \beta \underline{w}_2 + \gamma \underline{w}_3 \quad \text{dove} \quad \underline{X} - \underline{C} = A \underline{X}_{cam}, \quad A = [\underline{w}_1 \ \underline{w}_2 \ \underline{w}_3] \quad \text{con} \quad A^T = A^{-1}$$

$$A^{-1} \underline{X} - A^{-1} \underline{C} = \underline{X}_{cam} \quad \text{con} \quad A^{-1} = A^T = R \quad \text{allora} \quad R \underline{X} - R \underline{C} = \underline{X}_{cam}$$

I conti proseguono con:

$$[K|Q] = \begin{bmatrix} f & 0 & x_0 & 0 \\ 0 & f & y_0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{dove} \quad K = \begin{bmatrix} f & 0 & x_0 \\ 0 & f & y_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad \begin{bmatrix} \underline{X}_{cam} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R & -R\underline{C} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \\ U \end{bmatrix}$$

quindi

$$[K|Q] \begin{bmatrix} R & -RC \\ 000 & 1 \end{bmatrix} = P = [\underbrace{KR}_M | -KR C]$$

Così da ottenere la **forma finale** di una camera per la quale è stata studiata con una certa attenzione, scomponendola, la sua *anatomia*.

Tutte le informazioni importanti per la proiezione sono ricavabili dalla **matrice P**, quella che descrive l'anatomia della camera. Infatti K ed R si recuperano decomponendo la **matrice M**. La **matrice R** aiuta a determinare il cambiamento di sistema di riferimento (a sua volta formata da tre vettori sempre determinabili) così anche la matrice R risulta essere sempre determinabile. Esistono poi informazioni riconducibili alla matrice P senza bisogno di effettuare alcuna decomposizione: infatti, data una camera proiettiva, le sue quattro colonne corrispondono la prima a  $x_{00}$ , la seconda a  $y_{00}$ , la terza a  $z_{00}$  e la quarta a O, così da formare un quartetto di coordinate proiettive. Inoltre le sue tre righe, se messe a sistema, individuano tre diversi piani che si intersecano nel centro della camera:

$$\begin{array}{l} m_{11} X + m_{12} Y + m_{13} Z + m_{14} U = 0 \\ m_{21} X + m_{22} Y + m_{23} Z + m_{24} U = 0 \\ m_{31} X + m_{32} Y + m_{33} Z + m_{34} U = 0 \end{array} \quad \text{con} \quad \begin{array}{l} I=0 \rightarrow \text{punti di } P^3 \rightarrow x=0 \\ II=0 \rightarrow y=0 \\ III=0 \rightarrow U=0 \end{array}$$

La terza equazione, se davvero si riduce a  $U=0$ , indica i punti impropri dello spazio così che i punti impropri dello schermo siano anche i punti impropri dello spazio.  $III=0$  da anche l'equazione del piano principale; inoltre, i suoi tre coefficienti formano un vettore che dà la dimensione dell'asse focale (oltre alla sua direzione, ma non si sa nulla riguardo il verso).

La matrice P può essere comunque ricostruita senza fare ricorso a tutti gli elementi citati sinora: poiché rende possibile una certa proiezione del tipo  $P \underline{X} = \rho \underline{X}$ , si può dire che P costituisca un'applicazione  $\varphi: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$  di grado 3, tuttavia come matrice non possiede una inversa sinistra anche se ha una trasposta, la quale però possiede un'inversa sinistra.

$$(P_T)^+ P_T = I^3 \rightarrow P [(P_T)^+]_T = I^3 \text{ dove } [(P_T)^+]_T = P^- \text{ ovvero inversa sinistra}$$

Dato un punto X appartenente allo schermo, e dato il centro del sistema di riferimento della camera, in teoria si potrebbe determinare la retta che passa per entrambi questi punti dal momento che si ignora la natura del sistema di riferimenti associato. Il punto C (ovvero il centro) non si ha la certezza assoluta di dove si trovi esattamente, tuttavia sicuramente appartiene alla retta sopracitata e lo si può ricavare a partire dal punto X che è una sua proiezione.

**Determinazione della matrice P.** Si parte dalla conoscenza delle coordinate di una serie di punti dello spazio i quali possiedono un corrispettivo anche sullo "schermo" del piano proiettivo. Grazie alla relazione tra questi punti è possibile determinare la matrice P. Solamente se i punti sono posizionati in maniera generica e le equazioni alle quale danno corpo sono tra loro linearmente indipendenti.

La quantità di punti selezionati potrebbe non bastare in certe situazioni specifiche dove, per esempio, esistono infinite versioni della matrice P. Tali situazioni sono a buona ragione dette **configurazioni critiche**. Cosa che capita se i punti considerati si trovano tutti su una curva gobba cubica, per esempio; si tratta sempre di problemi che ammettono solo soluzioni approssimate, così che per ricadere nel caso critico basta anche soltanto che la disposizione dei punti approssimi una cubica gobba.

Va da sé che la calibrazione della camera coincida a pieno titolo con la sua decomposizione.

## 8.6 Geometria bipolare/epipolare

Ci si trova nel piano proiettivo duale ( $P^{2*}$ ). In questa sede si parla della *dualità* che esiste nella rappresentazione di punti e rette. Per ogni **retta** rappresentata in un qualsiasi piano proiettivo, presi i suoi coefficienti è facile individuare un *punto* ad essa associato all'interno del nuovo piano proiettivo duale che è in comune a tutte le rette che possiedono quella stessa equazione espressa nel piano proiettivo di partenza. Ovviamente la corrispondenza tra punto nel duale e retta nel piano di partenza è biunivoca.

Succede anche che date due rette nel piano proiettivo tradizionale, queste individuino due punti nel piano proiettivo duale. Tali punti individuano a loro volta una *retta* nel piano proiettivo duale la quale corrisponde in maniera biunivoca ad uno specifico **punto** nel piano proiettivo tradizionale. Tale punto sarà il punto di intersezione delle due rette le quali, in partenza, hanno individuato i due punti nel piano duale che hanno dato origine alla retta tra loro compresa.

Presi due punti  $A, B \in P^2$  è possibile associarvi una retta la quale individuerà un punto sul piano proiettivo duale:  $AB \rightarrow (a,b,c)$  in  $P^{2*}$ . Siano  $A \equiv (x_a, y_a, U_a), B \equiv (x_b, y_b, U_b)$  le coordinate dei due punti sul piano proiettivo:

$$\det \begin{bmatrix} x_a & x_b & x \\ y_a & y_b & y \\ U_a & U_b & U \end{bmatrix} = 0$$

Sviluppando i conti si ottiene:

$$\underbrace{(y_a U_b - y_b U_a)}_a x + \underbrace{(-x_a U_b + x_b U_a)}_b y + \underbrace{(x_a y_b - x_b y_a)}_c U$$

La terna così individuata (a,b,c) può essere ricavata anche in questa maniera sintetica:

$$\begin{bmatrix} 0 & -U_a & y_a \\ U_a & 0 & -x_a \\ -y_a & x_a & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_b \\ y_b \\ U_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$$

Dove la matrice 3x3 non è altro che una matrice simmetrica individuata con i soli termini o coordinate del punto A. Ovviamente, a seguito dello srotolamento dei calcoli, ci si accorge di ottenere il medesimo risultato di poco prima.

Riassumendo:  $\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = [A]_x B$  e vale lo stesso anche se  $[B]_x A$ . Il determinante della matrice

A è uguale a zero ed il suo rango dev'essere pari a 2 (e non uguale a 3, altrimenti il suo determinante sarebbe diverso da zero e viceversa).

### 8.6.1 Osservare un'oggetto con due camere

Si immagini di voler osservare un'oggetto X da due punti di vista differenti (quindi con due camere distinte). Ciascuna camera possiede un punto centrale C1 e C2 dal quale è possibile

osservare l'oggetto attraverso due schermi o piani proiettivi differenti,  $S_1$  ed  $S_2$ . Le rette che collegano i centri con l'oggetto osservato attraversano entrambe i piani proiettivi in due punti precisi,  $x$  ed  $x'$ . Sussistono le relazioni  $P_1 \underline{X} = \rho_1 \underline{x}$ ,  $P_2 \underline{X} = \rho_2 \underline{x}'$ .

Non si sa a priori quale relazione sussista tra i due sistemi di riferimento delle camere, tuttavia  $x$  ed  $x'$  sono tra loro in relazione perché sono entrambe la *proiezione di uno stesso oggetto*. È quindi possibile effettuare una ulteriore proiezione di  $X$  su di un terzo piano proiettivo sul quale le due proiezioni distinte coincidono. Si ottiene così una **prospettività** che altro non è se non una particolare proiettività, detta  $w: x \rightarrow x'$ . In questa specifica maniera si possono costruire infinite proiettività. Si vuole quindi trovare la precisa proiettività che lega i due piani proiettivi  $S_1$  ed  $S_2$ , per far ciò si sfrutta la nozione di *inversa sinistra*.

$$x = P_1^{-1} \text{ dove } x \in \langle \underline{C}, \underline{x} \rangle \text{ con } \underline{C} \rightarrow P^3, \underline{x} \rightarrow S_1 \text{ quindi } P_2(P_1^{-1} x) = \rho x' \rightarrow H = (P_2 P_1^{-1})$$

Quindi si può dire anche che  $\rho x' = H x$  quando  $H$  è una matrice  $3 \times 3$  con determinante diverso da 0 che manda tutti i punti dei piani proiettivi  $S_1$  ed  $S_2$  su di un piano proiettivo ad essi comune da essi completamente svincolato. Se si conoscono anche le matrici delle due camere in esame il calcolo della matrice  $H$  risulta alquanto più facile ed intuitivo.

### 8.6.2 Epipoli

Nel caso preso in esame il piano proiettivo  $S_1$  non passa per il centro  $C_2$  e  $S_2$  non passa ovviamente per  $C_1$ , essendo  $C_1$  e  $C_2$  punti distinti e distanti sia tra di loro che dai loro rispettivi "schermi". Esiste tuttavia una **retta** detta **epipolare** che collega  $C_1$  e  $C_2$  e che attraversa anche i due piani proiettivi in due specifici punti detti  $e_1$  ed  $e_2$ . In questa maniera i centri si proiettano sui loro piani proiettivi lungo la retta appena individuata. La retta può quindi essere descritta tramite il solito formalismo.

*Coordinate duali.*

$$L_{\underline{x}} = [e_2]_x \underline{x}' \text{ allora } [e_2]_x H \underline{x} \text{ con } H = P_2 P_1^{-1}$$

*Matrice fondamentale.*

$$[e_2]_x H = F \text{ con } \det(F) = 0 \text{ quindi } \chi: \forall \underline{x} \in S_1 \rightarrow F \underline{x} \in \mathbb{R}^3 \text{ con } \chi: P^2 \rightarrow P^{2*}.$$

Solitamente le uniche informazioni deducibili sono leggibili tramite la matrice  $F$ . Tuttavia tale matrice viene calcolata a partire dalle matrici delle due camere e dal secondo dei due epipoli. Tuttavia  $F$  esiste sempre, allora è calcolabile come segue:

$$F \underline{x} \rightarrow \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$$

La retta che attraversa  $S_2$  è esprimibile in forma cartesiana come  $ax' + by' + cu' = 0$  allora  $x'$  appartiene alla retta e corrisponde a  $x' \equiv (\bar{X}, \bar{Y}, \bar{U})$ . Si può quindi asserire che la retta possa essere intesa anche come  $a\bar{X}' + b\bar{Y}' + c\bar{U}' = 0$ . Quindi per ogni  $x$  ed  $x'$  intesi come punti che si corrispondono  $x' \perp F \underline{x} = 0 \rightarrow [\bar{X}' \bar{Y}' \bar{U}'] F \underline{x} = 0$ . Ogni volta che si ha a che fare con una coppia di punti che si corrispondono li si può trattare utilizzando la matrice  $F$ . Ovviamente, una volta trovata  $F$  è possibile ricavare la matrice  $H$  ed entrambi gli epipoli:  $F \underline{x} = \underline{Q} \rightarrow \underline{x} = e_1$  con  $F \underline{x}$  dove  $x$  è un'incognita. Questo metodo funziona sempre a patto che  $x$  non coincida con  $e_1$ , altrimenti non si genera alcuna retta passante per  $S_2$ .

Allo stesso modo si possono trovare le coordinate del secondo epipolo:  $x_T F_T x' = 0 \rightarrow x' = e_2$ . La matrice H si ricava agevolmente dal secondo epipolo e dalla matrice F. Ovviamente la matrice F ha anche molti altri utilizzi assai più sofisticati.

---

## **Appunti**

*sulla geometria proiettiva*

# Bibliografia

- [1] Andrea Molteni, “*Introduzione alla teoria delle curve differenziabili*”, 2006/2007  
URL → <http://www.mat.unimi.it/users/alzati/personale/dtesi/tesimol.pdf>
- [2] Federica Margherita Sandri, “*Curve interpolanti*”, 2011/2012  
URL → <http://www.mat.unimi.it/users/alzati/personale/dtesi/tesisandri.pdf>
- [3] Anna Mercuriali, “*Curve B-Spline*”, 2003  
URL → [http://www.mat.unimi.it/users/alzati/Geometria\\_Computazionale\\_98-99/apps/bezspli/bsplines.html](http://www.mat.unimi.it/users/alzati/Geometria_Computazionale_98-99/apps/bezspli/bsplines.html)
- [4] Laura Citrini, “*Approssimazione di curve e superfici (Bèzier-Spline)*”, 2007/2008  
URL → <http://crema.di.unimi.it/~citrini/GC/appross.pdf>
- [5] A.A. V.V., “*Dispense di Grafica Computazionale*”, 2009/2010  
URL → <http://digidownload.libero.it/b.dellavecchia/documents/Grafica%20computazionale%20finito.pdf>
- [6] S. Stuani, “*B-Spline Razionali non uniformi e NURBS di rivoluzione*”, 1998/1999  
URL → [http://www.mat.unimi.it/users/alzati/Geometria\\_Computazionale\\_98-99/apps/nurbs/algo1.htm](http://www.mat.unimi.it/users/alzati/Geometria_Computazionale_98-99/apps/nurbs/algo1.htm)
- [7] Laura Citrini, “*Superfici*”, 2007/2008  
URL → <http://crema.di.unimi.it/~citrini/GC/Superfici.pdf>
- [8] Alberto Alzati, “*Superfici differenziabili*”  
URL → <http://www.mat.unimi.it/users/alzati/personale/appunti/geom3-cap3.pdf>
- [9] Farin, “*Curves and Surfaces for computer aided geometric design*”, ed. Academic Press, 1990

**Disclaimer.** Si tratta delle trascrizioni di appunti presi durante le lezioni del corso di **Geometria Computazionale** tenuto dal prof. Alzati presso l'*Università degli Studi di Milano* (laurea magistrale in Informatica per la Comunicazione) nell'AA 2013/2014 ad opera della *dott.ssa Farinelli Agnese*. Poiché si tratta di appunti trascritti potrebbero esserci diversi errori concettuali, passaggi fraintesi ed errori di battitura. L'autore non si accolla l'onere di garantire la veridicità dei suddetti appunti né è perseguibile in alcuna maniera qualora studiarli non sortisca l'effetto desiderato.

Puoi scaricare questi appunti presso l'indirizzo ([www.thalionwen.altervista.org](http://www.thalionwen.altervista.org)) e diffonderli come meglio credi, stampandoli o inviandoli a tutti coloro che ne desiderano una copia. Puoi utilizzare questo lavoro come punto di partenza per un'opera derivata, aggiungendone nuove parti oppure togliendone a piacimento, a patto che l'opera derivata venga condivisa alla stessa maniera dell'opera originale. Non attribuirti la paternità di quest'opera spacciandola come tua né è permesso scambiarla con lo scopo di ottenere denaro.



<http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/3.0/it/deed.it>  
<http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/3.0/it/legalcode>